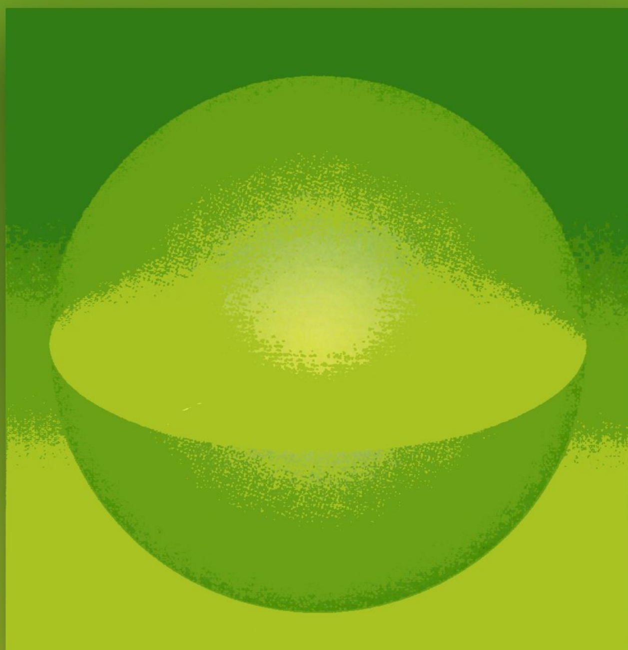
J. Mačys

MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADŲ UŽDAVINIAI

1986–2002 m.



MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS
OLIMPIADŲ UŽDAVINIAI

1986–2002 m.

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS INSTITUTAS

J. Mačys

MOKSLEIVIŲ MATEMATIKOS OLIMPIADŲ UŽDAVINIAI

1986–2002 m.

TEV

VILNIUS 2003

Knyga parengta parėmus Lietuvos valstybiniam mokslo ir studijų fondui

Darbo vadovas *Valdas Vanagas*

Redaktorius *Paulius Drungilas*

Programinė įranga: *Tadeušas Šeibakas*

Kompiuterinė grafika: *Edita Tatarinavičiūtė*

Teksto kompiuterinis rinkimas ir maketavimas: *Laimutė Ališauskienė, Nijolė Drazdauskienė, Loreta Giriūnienė*

Korektorė *Irena Muzikevičiūtė*

Konsultantai: *Elmundas Žalys, Marytė Stričkienė*

Leidyklos TEV interneto svetainė www.tev.lt

ISBN 9955-491-35-3

TURINYS

Arūnas Grincevičius

1947 10 02 – 1993 04 19



Šiemet sukanka 10 metų nuo matematikos mokslų daktaro Arūno Grincevičiaus mirties – ši knyga skirta šviesiam jo atminimui.

Arūnas Grincevičius gimė Vilniuje, matematikų šeimoje (jo tėvas Kleopas Grincevičius – garsus geometras, Vilniaus universiteto profesorius). Jau mokyklos suole išryškėjo visapusiški Arūno gabumai – jis labai gerai mokėsi, sėkmingai dalyvavo įvairių dalykų olimpiadose. 1964 m. įstojo į Maskvos V. Lomonosovo universitetą, kurį su pagyrimu baigė 1969 m., po to ten mokėsi aspirantūroje.

1971 metais Arūnas pradėjo dirbti Vilniuje Matematikos ir informatikos institute. 1976 m. apgynė matematikos mokslų daktaro (tada kandidato) disertaciją. Jo mokslinių interesų ratas buvo labai platus: tikimybių teorija, algebra, kompiuterija, programavimas. Visuose matematikos klausimuose, kurie Arūną sudomindavo, jis sugebėdavo prasiskverbti iki pačių gilumų, stebindamas net tos srities autoritetus. Keldavo pavydą jo mokėjimas susikoncentruoti, dirbti, galvoti, gilintis į problemą bet kuriomis sąlygomis – triukšme ar sumaištyje.

Arūnas mėgo ne tik matematiką – jis daug kur buvo nepralenkiamas: buvo batuto sporto meistras, pajėgus šaškininkas, domėjosi baletu ir pats šoko klasikinį šokį, teisėjavo šuolių į vandenį varžybose, žaidė visus įmanomus kompiuterinius žaidimus (ir nuolat gerino rekordus, kurie visi priklausė jam).

Kai kažkas į institutą pirmą kartą atsinešė Rubiko kubelį, Arūnas pasukiojo jį rankose, grąžino, po to kokią valandą pasėdėjo kabinete, prirašė krūvą formulių, o išėjęs iš kabineto pareiškė, kad jau moka susukti kubelį – ir iš karto tai pademonstravo.

A. Grincevičius daug laiko ir energijos skyrė mokiniams, besidomintiems matematika. Didžiuliai jo nuopelnai jaunųjų matematikų olimpiadoms: jis sukūrė daugybę originalių uždavinių, kuriais žavėjosi ne tik Lietuvos, bet ir kitų šalių olimpiadų organizatoriai bei dalyviai. Jis – daugelio knygų, skirtų jauniesiems matematikams, autorius (užtenka pasižiūrėti kad ir į literatūros sąrašą knygos gale). Po kiekvienos olimpiados pasirodydavo knygelė, kurioje būdavo pateikiami originalūs olimpiados uždavinių (taip pat ir jo sukurtų) sprendimai, išsami analizė. Jis dar dalyvavo rengiant 1993 m. užduotis, bet atvažiuoti į olimpiadą nebegalėjo.

Nuolat pasigendame jo talento, žinių, visapusiškumo ir juntame, kad daug ką jis padarytų geriau už bet kurį iš mūsų.

Kolegos

Šviesiam Arūno Grincevičiaus atminimui

PRATARMĖ

Ši knyga — tai tiesioginis A. Grincevičiaus ir J. Mačio knygos „Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai“ tęsinys. Būtent dėl to buvo pasistengta išlaikyti anos knygos sandarą ir stilių. Vis dėlto knyga sudaryta taip, kad skaitytojas galėtų skaityti ją nepriklausomai nuo ankstesnės.

Knygoje pateikiami 1986–2002 metų Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai ir jų sprendimai (minėta knyga [1] apima visas ankstesnes 1952–1985 m. olimpiadas).

Pirmoje dalyje pateikiamos kiekvienos olimpiados uždavinių sąlygos, antroje — uždavinių sprendimai. Sąlygas buvo stengtasi palikti nepakeistas — tik kur ne kur buvo įnešta redakcinio pobūdžio pataisymų, o sprendimus pateikti kuo savarankiškesnius ir nesiremti kitais uždaviniais, — juo labiau, kad nuoroda dažnai užima tiek pat vietos, kiek ir sprendimo dalies kartojimas. Retkarčiais nurodomas panašiai formuluojamas ar sprendžiamas uždavinys.

Rašant knygą, buvo laikomasi kelių principų. Pirma, kiekvienas uždavinys turi būti išspręstas. Tai nereiškia, kad visų jų sprendimai vienodai išsamūs. Kartais jie pateikiami vienu sakiniu. Vis dėlto manėme, kad skaitytojui reikia nurodyti galimo sprendimo pavyzdį. Antra, turi būti pateiktas išsamus kiekvieno uždavinio atsakymas. Įsigalėjusi nuomonė, kad svarbu uždavinį išspręsti, o atsakymą parašyti gali kiekvienas, yra labai abejotina. Be to, taip skaitytojui suteikiama galimybė pačiam išspręsti uždavinį ir pasitikrinti tik atsakymą. Trečia, reikia duoti kelis kai kurių uždavinių sprendimus. Tai leidžia geriau suvokti uždavinį, be to, vieną sprendimą gali suprasti tik dvyliktos klasės mokinys, o kitą — ir penktokas. Po keletą dažno uždavinio sprendimo būdų galima rasti [5]–[16] leidiniuose (žr. Panaudotos literatūros sąrašą). Ketvirta, uždavinių numeracija turi būti ištisinė, — pikta, kai ieškodamas atsakymo arba sprendimo randi kelis tuo pačiu numeriu pažymėtus uždavinius.

Knygoje yra dalykinė ir uždavinių tematikos rodyklės, panaudotos ir rekomenduojamos literatūros sąrašai.

Keli žodžiai apie knygoje vartojamus žymenis. Jie standartiniai, artimi vartojamiems mokykloje. Sąlygose laužtiniai skliaustai reiškia suskliausto skaičiaus sveikąją dalį. Raidė L sprendime reiškia sąlygoje nurodytą lygtį, nelygybę arba reiškinį. Sprendimų skyriuje santrumpa „žr.“ reiškia, kad toks uždavinys jau buvo, ir nukreipia į atitinkamo uždavinio sprendimą. Kartais nukreipiama ir į knygą [1], tada rašoma „Žr. [1], ... uždavinį“.

Parenkant uždavinius darbui su mokiniais, galima atsižvelgti į tai, kurioms klasėms uždavinys buvo duotas spręsti olimpiadoje. Dalykinė rodyklė padės greitai parinkti panašių uždavinių. Čia pravers ir tos pačios temos pavadinimo pakartojimas rodyklėje kelis kartus. Pavyzdžiui, trigonometrines lygtis rasime tiek prie lygčių (L14 Trigonometrinės lygtys), tiek prie trigonometrijos uždavinių (Trigonometrinės lygtys, žr. L14). Pagal uždavinių tematikos rodyklę galima sužinoti, kuriai temai (ar net kurioms kelioms temoms) priskiriamas konkretus uždavinys. Tai net tam tikra nuoroda sprendžiant uždavinį.

Uždavinių sąlygos atskirtos nuo sprendimų. Tai leis norinčiam pirma pagalvoti ar paspręsti, o tik tada skaityti sprendimą (deja, dėl knygos apimties sąlygos nekartojamos prie

sprendimų, nors tai ir nėra patogu skaitytojui). Nepeiktina, kai sprendimai tik „skaitomi“, bet prieš tai verta gerai įsigilinti į sąlygą.

Perprasti teoriją mokiniui padės mokytojas. Tam dažniausiai pakaks vadovėlio, ir tik kartais reikės pasinaudoti rekomenduojamos literatūros leidiniais.

Ši knyga atspindi didelio matematikų būrio darbą — tai aišku vien pasižiūrėjus į Panaudotos literatūros sąrašą. Jos tikrieji kūrėjai — tai olimpiadų organizatoriai, vertinimo komisijos nariai, straipsnių apie olimpiadas autoriai ir kiti. Bet neabejotinai didžiausias indėlis čia priklauso Arūnui Grincevičiui. Jis daug metų kartu su kitais rengė užduotis, dalyvavo vertinimo komisijos darbe, tobulino užduočių sprendimus. Deja, į 1993 m. olimpiadą atvykti dėl ligos jis jau nebegalėjo, nors daug prisidėjo rengiant jai užduotis. Beje, šią knygą užbaigėme labai skubėdami — norėjosi jos pristatymu paminėti Arūno mirties dešimtmetį ir dešimtąją olimpiadą be Arūno...

Knygą spaudai parengė garsusis mūsų olimpiadininkas Paulius Drungilas, ir už tai jam nuoširdžiai ačiū.

Skaitytojus prašome pastabas siųsti adresu: Akademijos g. 4, Matematikos ir informatikos institutas, LT-2021 Vilnius.

Juozas Mačys

SĄLYGOS

XXXV OLIMPIADA (1986 m.)

II ratas

IX klasė

1. Išspręskite lygtį $x^8 + (x+2)^8 = 2$. (*4 taškai*)

2. Raskite mažiausią natūralųjį skaičių, kurio visi skaitmenys vienetai ir kurį dalijant iš 11, 37 ir 41 gaunama liekana 1, o dalijant iš 9 — liekana 7. (*4 taškai*)

3. Tiesės m ir n kertasi taške O. Tiesėje m pažymėtas taškas M, tiesėje n — taškas N (nė vienas iš tų taškų nesutampa su tašku O). Išvestos vieno iš kampų, kuriuos sudaro tiesės m ir MN, pusiaukampinė ir vieno iš kampų, kuriuos sudaro tiesės n ir MN, pusiaukampinė. Tos pusiaukampinės susikirto taške P. Įrodykite, kad taškas P yra vieno iš tiesių m ir n sudaromų kampų pusiaukampinėje. (*4 taškai*)

4. Raskite visas tokias sekas (x_n), kad $x_1 = 1$, $x_9 = 9$, $x_{86} = 86$, o bet kurių trijų iš eilės einančių narių suma pastovi. (*4 taškai*)

5. Atlikus daugybos veiksmą, skaitmenys po kablelio buvo nutrinti. Liko užrašas

$$1,\ldots \cdot 2,\ldots = 3,\ldots$$

(vietoj nutrintųjų skaitmenų padėti daugtaškiai, nutrintųjų skaitmenų skaičius kiekviename iš dauginamųjų ir sandaugoje nebūtinai vienodas). Visų trijų skaičių pirmas skaitmuo po kablelio buvo tas pats. Koks buvo tas skaitmuo? (*4 taškai*)

X klasė

6. Įrodykite, kad jei $c + d = 1$, $c \neq 0$, $d \neq 0$ ir $\frac{c}{a} + \frac{d}{b} = \frac{1}{ac+bd}$, tai $a = b$. (*4 taškai*)

7. Įrodykite, kad jeigu a yra iracionalusis skaičius, tai funkcija $y = \cos x + \cos ax$ neperiodinė. (*4 taškai*)

8. Nubraižykite funkcijos $y = \frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}$ grafiką. (*4 taškai*)

9. Kiek yra plokštumų, vienodai nutolusių nuo keturių duotų taškų, nesančių vienoje plokštumoje? (*4 taškai*)

10. Duota funkcija $y = x^2 - 4ax + a^4$. Jos parametras a gali įgyti reikšmes, moduliu ne didesnes už 1. Su kiekviena iš minėtų a reikšmių randame funkcijos mažiausią reikšmę $y_{\min}$. Su kuria parametro a reikšme $y_{\min}$ yra didžiausia? (*4 taškai*)

XI klasė

11. Išspręskite lygtį $x^y = y^{x-y}$ natūraliaisiais skaičiais. (*4 taškai*)

12. Seka (a_n) apibrėžta lygybe $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$, be to, a_1, a_2 — natūralieji skaičiai ir $a_2 > a_1$. Įrodykite, kad $a_{1986} \geqslant 2^{1985}$. (*4 taškai*)

13. Duota funkcija $y = x^2 - 4ax + a^4$. Jos parametras a gali įgyti reikšmes, moduliu ne didesnes už 1. Su kiekviena iš minėtų a reikšmių randame funkcijos mažiausią reikšmę $y_{\min}$. Su kuria a reikšme $y_{\min}$ yra didžiausia? (*4 taškai*)

14. Trikampis ABC — statusis, C — stačiojo kampo viršūnė. Į trikampį įbrėžto apskritimo spindulys lygus r. Nubrėžtas kitas apskritimas, liečiantis kraštinę AC bei kraštinių BA ir BC tęsinius. Jo spindulys lygus R. Raskite trikampio ABC plotą. *(4 taškai)*

15. Trikampio kraštinių ilgiai yra a, b, c, apibrėžtinio apskritimo spindulys lygus R. Pažymėkime $V = a^2+b^2+c^2-8R^2$. Įrodykite, kad trikampis yra smailusis, statusis arba bukasis, jei atitinkamai $V > 0$, $V = 0$ arba $V < 0$. *(4 taškai)*

III ratas

IX klasė

16. Ar galima taip perstatyti skaičiaus:
a) 9 754 310; b) 8 754 310
skaitmenis, kad gautas skaičius dalytųsi iš 37? *(4 taškai)*

17. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} (1-x^2)y = 2x, \\ (1-y^2)x = 2y. \end{cases}$ *(4 taškai)*

18. Įrodykite nelygybę $\frac{1}{(a-1)^2+1} + \frac{1}{(a+1)^2+1} < \frac{4}{3}$ $(a \in \boldsymbol{R})$. *(4 taškai)*

19. Atlikus daugybos veiksmą, visi trejetai buvo palikti, o visi kiti skaitmenys pakeisti žvaigždutėmis. Liko toks užrašas:

$$\begin{array}{r}
\star\star\star \\
\times\ 3\star\star \\
\hline
\star 3 \star \\
+\ \star\star\star\star \\
\star\star\star\star \\
\hline
\star\star\star\star 3 \star
\end{array}$$

Atstatykite skaitmenis. (Raskite visus sprendinius.) *(4 taškai)*

20. Iškilojo n-kampio vienos kraštinės ilgis lygus vienetui, o kiekvienos įstrižainės ilgis — sveikasis skaičius.
a) Įrodykite, kad $n \leqslant 5$.
b) Pateikite tokio keturkampio pavyzdį.
c) Pateikite tokio penkiakampio pavyzdį. *(4 taškai)*

X klasė

21. Kvadratinio sodo centre tupi kiškis, o kiekviename sodo kampe — vilkas. Ar gali kiškis išbėgti iš sodo, jei vilko greitis 1,4 karto didesnis už kiškio ir vilkai gali judėti tik kvadrato kraštinėmis? *(4 taškai)*

22. Su kuriais x teisinga nelygybė
$\cos(2x^3-x^2-5x-2) + \cos(2x^3+3x^2-3x-2) - \cos\left((2x+1)\sqrt{x^4-5x^2+4}\right) <$
< 3? *(4 taškai)*

23. Skirtingi skaičiai a, b, c tenkina lygybes $a+\frac{1}{b} = b+\frac{1}{c} = c+\frac{1}{a} = p$. Kokias reikšmes gali įgyti p? *(4 taškai)*

24. Išspręskite lygtį $\frac{x^4+1}{x^2+1} + \frac{x^8+1}{x^4+1} = 2$. *(4 taškai)*

25. Iškilojo n-kampio vienos kraštinės ilgis lygus vienetui, o kiekvienos įstrižainės ilgis — sveikasis skaičius.
a) Įrodykite, kad $n \leqslant 5$.
b) Pateikite tokio keturkampio pavyzdį.
c) Pateikite tokio penkiakampio pavyzdį. *(4 taškai)*

XI klasė

26. Duoti penki skaičiai. Įrodykite, kad vieną iš jų galime pažymėti x, o kitą y taip, kad būtų teisinga nelygybė $0 \leqslant \frac{x-y}{1+xy} < 1$. *(4 taškai)*

27. Išspręskite lygtį $\frac{x^4+1}{x^2+1} + \frac{x^8+1}{x^4+1} = 2$. *(4 taškai)*

28. Sekos (a_n) nariai su kiekvienu $n \geqslant 1$ tenkina lygybę $a_1 \cdot a_2 \cdot \dots \cdot a_n = n^2$ $(a_1 = 1)$. Raskite:
a) $b_n = a_1 + a_3 + a_5 + a_9 + \dots + a_{2^n+1}$;
b) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{b_n}{n}$. *(4 taškai)*

29. Raskite visas natūraliųjų skaičių poras $(m; n)$, su kuriomis teisinga nelygybė

$$\left|\frac{m}{n} - \sqrt{2}\right| < \frac{1}{n^3}.$$

(4 taškai)

30. Lygiakraščio trikampio kraštinės ilgis lygus natūraliajam skaičiui n. Su kokiais n trikampį galima padalyti į vienodas lygiašones trapecijas, kurių kraštinių ilgiai yra 1, 1, 1 ir 2? *(4 taškai)*

XXXVI OLIMPIADA (1987 m.)

II ratas

X klasė

31. Duoti 22 skaičiai. Žinoma, kad bet kurių septynių skaičių suma didesnė už 1. Įrodykite, kad visų skaičių suma didesnė už π. *(4 taškai)*

32. Apskritimo spindulys lygus 1. Keletas jo lankų, kurių bendras ilgis lygus 3, nuspalvinti. Įrodykite, kad galima rasti apskritimo skersmenį, kurio abu galai nenuspalvinti. *(4 taškai)*

33. Lygties $x^2+px+q = 0$ sprendinių santykis lygus lygties $x^2+3px+q_1 = 0$ sprendinių santykiui. Nė vienas šių lygčių koeficientas nelygus 0. Raskite q ir q_1 santykį. *(3 taškai)*

34. Įrodykite, kad $a^k - 1$ dalijasi iš k^{m+1}, jei $a - 1$ dalijasi iš k^m (a, k, m — natūralieji skaičiai). *(4 taškai)*

35. Per kvadrato $ABCD$ kraštinės AB vidurio tašką E išvesta tiesė, kuri kraštinę BC kerta taške F. Per viršūnę A išvesta tiesė, lygiagreti tiesei EF. Ji kerta kraštinę CD taške G. Įrodykite, kad į kvadratą $ABCD$ įbrėžtas apskritimas liečia atkarpą GF. *(5 taškai)*

XI klasė

36. Duoti 22 skaičiai. Žinoma, kad bet kurių septynių skaičių suma didesnė už 1. Įrodykite, kad visų skaičių suma didesnė už 3,14. *(4 taškai)*

37. Išspręskite lygtį $6!\,x! = y!$ natūraliaisiais skaičiais. (Simbolis $n!$ reiškia sandaugą $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, o $1! = 1$.) *(4 taškai)*

38. Duotas iškilasis keturkampis $ABCD$. Taškai K, L, M, N atitinkamai yra keturkampio kampų A ir B, B ir C, C ir D, D ir A pusiaukampinių kirtimosi taškai. Įrodykite, kad jei taškai K, L, M ir N nesutampa, tai atkarpos KL ir MN neturi bendrų taškų. *(4 taškai)*

39. Ar lygtis $8\cos n^\circ \cos(45^\circ - n^\circ) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$ turi natūraliųjų sprendinių? *(4 taškai)*

40. Aštuonkampis, kurio visos kraštinės lygios, įbrėžtas į stačiakampį (visos aštuonkampio viršūnės yra stačiakampio kraštinėse). Įrodykite, kad priešais esančios aštuonkampio kraštinės yra lygiagrečios. *(4 taškai)*

XII klasė

41. Iškilajame keturkampyje $ABCD$, kurio įstrižainės susikerta taške O, iš taškų B, C ir O nuleisti statmenys BE, CF ir OG į kraštinę AD (arba į jos tęsinį). Įrodykite, kad keturkampio plotas lygus $\frac{AD \cdot BE \cdot CF}{2OG}$. *(4 taškai)*

42. Su kuriomis a reikšmėmis lygtis $x + 1 = \sqrt{ax}$ turi vienintelį sprendinį? *(4 taškai)*

43. Trikampio kampai yra A, B, C, o atitinkamos kraštinės a, b, c, be to, $\angle C \neq 90^\circ$. Pažymėkime $M = \frac{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} C}$. Įrodykite, kad:
a) $a^2 + b^2 = \left(1 + \frac{2}{M}\right)c^2$;
b) jei $M = 2$, tai $\angle C \leqslant 60^\circ$. *(5 taškai)*

44. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = 1, \\ \sqrt{x+y} = x^2 - y. \end{cases}$ *(4 taškai)*

45. Įrodykite, kad bet kokiam natūraliajam skaičiui n, $n \geqslant 2$, galima rasti tokį natūralųjį skaičių k, kad būtų teisinga lygybė $\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^2 = \frac{k+\sqrt{k^2-4}}{2}$. *(3 taškai)*

III ratas

X klasė

46. Apskritimo skersmenį AB statmenai kerta tiesė m. Per tašką A išvestos dvi tiesės, kurios kerta tiesę m taškuose C ir D, o apskritimą — atitinkamai taškuose E ir F. Duota, kad $AC = 5$, $AE = 6$, $AD = 10$. Raskite AF. *(4 taškai)*

47. Nurodykite natūraliųjų skaičių, didesnių už 100, trejetą $(x; y; z)$, tenkinantį lygybę $x^2 + yz^2 - xy - xz^2 = 1987$. *(3 taškai)*

48. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} 2x + yz = 3, \\ 2y + xz = 3, \\ 2z + xy = 3. \end{cases}$ *(4 taškai)*

49. Seka $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots$ sudaryta pagal taisyklę $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{7}{x_n}$. Su kuriomis x_1 reikšmėmis seka (x_n) yra griežtai mažėjanti? (*4 taškai*)

50. Skaičius N lygus pirmųjų n pirminių skaičių sandaugai ($n \geqslant 2$). Įrodykite, kad nė vienas iš skaičių $N-1$ ir $N+1$ nėra natūraliojo skaičiaus kvadratas. (*5 taškai*)

XI klasė

51. Natūralusis skaičius lygus savo skaitmenų kubų sumai. Įrodykite, kad jis mažesnis už 3000. (*4 taškai*)

52. Išspręskite lygtį $\sin x \sin 5x + 3 \sin 3x \sin 7x = 4$. (*4 taškai*)

53. Stačiakampio kraštinės lygios 8 ir 9. Į jį įbrėžtas iškilasis šešiakampis, kurio visos kraštinės lygios (kiekviena jo viršūnė yra stačiakampio kraštinėje arba viršūnėje).
a) Ar gali šešiakampio kraštinė būti lygi 5?
b) Įrodykite, kad šešiakampio kraštinė ne ilgesnė už 5. (*4 taškai*)

54. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} 2x + yz = 3, \\ 2y + xz = 3, \\ 2z + xy = 3. \end{cases}$ (*4 taškai*)

55. Su skaičių pora $(a; b)$ leidžiama atlikti šias operacijas: pereiti prie poros $(a+2; b-1)$, prie poros $(a+1; b-2)$, prie poros $(a-2; b+1)$ ir prie poros $(a-1; b+2)$. Ar galima atlikus keletą žingsnių nuo poros (13; 17) pereiti:
a) prie poros (37; 43);
b) prie poros (43; 37)? (*4 taškai*)

XII klasė

56. Ant plokštumos padėti keturi rutuliai taip, kad kiekvienas iš jų liečia likusius tris. Dviejų rutulių spindulys yra vienodas ir lygus R. Kitų dviejų rutulių spindulys taip pat vienodas. Raskite jį. (*4 taškai*)

57. Trikampio kampų tangentai sudaro aritmetinę progresiją. Įrodykite, kad dvigubų kampų sinusai taip pat sudaro aritmetinę progresiją. (*4 taškai*)

58. Seka (a_n) sudaryta pagal taisyklę $a_1 = 5$, $a_{n+1} = a_n^2$. Kiek skaičių a_{99} ir a_{100} paskutinių skaitmenų sutampa? (*4 taškai*)

59. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} 2x + yzt = 3, \\ 2y + xzt = 3, \\ 2z + xyt = 3, \\ 2t + xyz = 3. \end{cases}$ (*4 taškai*)

60. Aštuoniolikaženklis skaičius dalijasi iš 7. Paskutinis jo skaitmuo perkeltas į pirmą vietą. Įrodykite, kad gautasis skaičius taip pat dalijasi iš 7. (*4 taškai*)

XXXVII OLIMPIADA (1988 m.)

II ratas

X klasė

61. Išspręskite lygtį: $x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0$. (*4 taškai*)

62. Dviženklis skaičius x turi tokią savybę: galima rasti tokį natūralųjį skaičių A, kad x ir A sandaugos priešpaskutinis skaitmuo lygus 2. Raskite visus tokius dviženklius skaičius x. (*4 taškai*)

63. Kiek skaitmenų turi skaičius 1010...101, jeigu jis dalijasi iš 9999? (*4 taškai*)

64. Trikampio ABC kampų A ir C didumai yra po $40°$, AD — pusiaukampinė. Įrodykite, kad $AD + DB = AC$. (*4 taškai*)

65. Išspręskite sistemą $\begin{cases} x^2 + y^2 + z = 1, \\ x^2 + y + z^2 = 1, \\ x + y^2 + z^2 = 1. \end{cases}$ (*4 taškai*)

XI klasė

66. Apskritimo spindulys lygus 1. Styga AB irgi lygi 1. Stygą AB ir trumpesnį lanką AB dalijame į tris lygias dalis. Per dalijimo taškus, esančius lanke ir stygoje arčiau taško A, brėžiame vieną tiesę, o per dalijimo taškus, esančius arčiau taško B, — kitą. Šios tiesės kertasi taške P. Raskite kampą APB. (*5 taškai*)

67. Įrodykite, kad jeigu skaičiai $a + b + c$ ir $a^2 + b^2 + c^2$ dalijasi iš nelyginio natūraliojo skaičiaus n, tai ir skaičius $a^4 + b^4 + c^4$ dalijasi iš n. (a, b, c — sveikieji skaičiai.) (*4 taškai*)

68. Raskite visus natūraliuosius skaičius, kurie yra vienetu didesni už savo skaitmenų kvadratų sumą. (*4 taškai*)

69. Raskite $a + b + c + d$, jei žinoma, kad $\begin{cases} 6a + 2b = 4801, \\ 6c + 3d = 2595{,}75, \\ a + 3b + 2d = 3821. \end{cases}$ (*3 taškai*)

70. Trikampio kraštinės yra a, b, c, o atitinkami kampai A, B, C. Įrodykite, kad yra teisinga lygybė $a \cdot \sin(B - C) + b \cdot \sin(C - A) + c \cdot \sin(A - B) = 0$. (*4 taškai*)

XII klasė

71. Skaitmenų seka 1, 9, 8, 7, 5, 9, 9, 0, ... sudaryta taip: kiekvienas skaitmuo, pradedant penktuoju, yra keturių prieš tai parašytų skaitmenų sumos paskutinis skaitmuo. Ar yra sekoje iš eilės einančių skaitmenų grupė 1, 9, 8, 8? (*4 taškai*)

72. Išspręskite lygtį $2x^3 - 13x + \sqrt{6} = 0$. (*4 taškai*)

73. Visi didėjančios begalinės aritmetinės progresijos nariai yra natūralieji skaičiai. Žinoma, kad vienas progresijos narys yra sveikojo skaičiaus kvadratas. Įrodykite, kad progresijoje yra ir daugiau sveikųjų skaičių kvadratų. (*4 taškai*)

74. Įrodykite, kad su visais $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$ teisinga nelygybė $x + y + \cos(xy) \geqslant 1$. *(4 taškai)*

75. Įrodykite, kad kiekviena trikampė piramidė turi viršūnę, prie kurios visi plokštieji kampai smailūs. *(4 taškai)*

III ratas

X klasė

76. Ar yra taisyklingasis daugiakampis, kurio kampas lygus pirminiam laipsnių skaičiui? Raskite visų tokių daugiakampių kampus. *(4 taškai)*

77. Raskite du skaičius, kurių kiekvienas yra 6 vienetais mažesnis už kito kvadratą. *(3 taškai)*

78. Duota 10 atkarpų, kurių ilgiai — sveikieji nelyginiai skaičiai, mažesni už 100. Įrodykite, kad iš kurių nors trijų atkarpų galima sudaryti trikampį. *(5 taškai)*

79. Raskite tokią natūraliųjų skaičių m ir n porą, kad būtų teisingos nelygybės

$$\frac{993}{994} < \frac{m}{n} < \frac{994}{995},$$

o suma $m + n$ būtų mažiausia. *(4 taškai)*

80. Išskaidykite dauginamaisiais reiškinį $x^4 + a^4 + (x + a)^4$. *(4 taškai)*

XI klasė

81. Iškilajame keturkampyje $ABCD$ dvi priešingos kraštinės padalytos į šimtą lygių dalių kiekviena. Sujungus atitinkamus dalijimo taškus, keturkampis $ABCD$ padalytas į 100 keturkampių. Pirmojo iš jų plotas lygus 1, o paskutiniojo — 2. Raskite keturkampio $ABCD$ plotą. *(4 taškai)*

82. Išspręskite natūraliaisiais skaičiais lygtį $x^2 + (x + y)^2 = (x + 9)^2$. *(4 taškai)*

83. Įrodykite, kad su visais realiaisiais skaičiais a ir b yra teisinga nelygybė $(a + b)(1 + ab) \leqslant (1 + a^2)(1 + b^2)$. *(4 taškai)*

84. Kiekvienam natūraliajam n raskite skaičiaus $10(\sqrt{n^2 + n + 1} - n)$ sveikąją dalį. *(4 taškai)*

85. Raskite visus natūraliuosius penkiaženklius skaičius, kurių kvadrato paskutiniai skaitmenys vėl sudaro pradinį skaičių. *(4 taškai)*

XII klasė

86. Skaičių sekos (a_n) nariai tenkina nelygybę $\frac{a_n + a_{n+2}}{2} \geqslant a_{n+1}$ su kiekvienu n. Įrodykite, kad su kiekvienu n teisinga nelygybė $\frac{a_n + a_{n+2} + a_{n+4}}{3} \geqslant \frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{2}$. *(4 taškai)*

87. Šachmatų lentos laukeliai yra kvadratai, kurių kraštinės lygios 1. Ant lentos padėtas stačiakampis popieriaus lapas 2×1. Su kokiu didžiausiu juodų laukelių skaičiumi popieriaus lapas gali turėti bendrų vidinių taškų? *(5 taškai)*

88. Ar yra taisyklingasis daugiakampis, kurio kampas lygus pirminiam laipsnių skaičiui? *(3 taškai)*

89. Išspręskite natūraliaisiais skaičiais lygtį $3x^2 + 2y^2 = 4xy + 2x$. *(4 taškai)*

90. Duota 10 atkarpų, kurių ilgiai — sveikieji nelyginiai skaičiai, mažesni už 100. Įrodykite, kad iš kurių nors trijų atkarpų galima sudaryti trikampį. *(4 taškai)*

XXXVIII OLIMPIADA (1989 m.)

II ratas

X klasė

91. Išspręskite sveikaisiais skaičiais sistemą $\begin{cases} x^2 + 2xy + 2xz + 4yz = -16, \\ y^2 + 2xy + 2yz + 4xz = 8, \\ z^2 + 2xz + 2yz + 4xy = -7. \end{cases}$ *(4 taškai)*

92. Duota, kad $\frac{a}{b} > \sqrt{2}$. Įrodykite, kad $\left|\sqrt{2} - \frac{a^2+2b^2}{2ab}\right| < \frac{a}{b} - \sqrt{2}$. *(4 taškai)*

93. a, b, c — sveikieji skaičiai. Raskite mažiausią teigiamą a reikšmę, su kuria kvadratinio trinario $ax^2 + bx + c$ šaknys yra teigiamos, skirtingos ir mažesnės už vienetą. *(4 taškai)*

94. Išspręskite lygtį $x + \frac{x}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{35}{12}$. *(4 taškai)*

95. Kokį didžiausią plotą gali turėti trikampis, kurio kraštinės a, b, c tenkina nelygybes $0 < a \leqslant 1 \leqslant b \leqslant 2 \leqslant c \leqslant 3$? *(4 taškai)*

XI klasė

96. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinėse AB, BC, CD, DA paimti taškai K, L, M, N taip, kad $\frac{AK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CM}{CD} = \frac{DN}{DA}$. Įrodykite, kad keturkampio $KLMN$ plotas ne mažesnis už keturkampio $ABCD$ ploto pusę. *(5 taškai)*

97. Ar galima natūraliuosius skaičius nuo 1 iki 12 suskirstyti į keturias grupes po 3 skaičius taip, kad kiekvienoje grupėje vienas iš skaičių būtų lygus kitų dviejų sumai? *(4 taškai)*

98. Išspręskite lygtį $x^{2y} = 2^z - 1$ natūraliaisiais skaičiais. *(4 taškai)*

99. Įrodykite, kad jei $\sqrt{1988 + x} + \sqrt{1988 + y} = 2\sqrt{1988 + a}$, tai $x + y \geqslant 2a$. *(3 taškai)*

100. Keturkampio $ABCD$ kampai tenkina lygybę $\cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 0$. Įrodykite, kad yra du keturkampio kampai, kurių suma lygi 180°. *(4 taškai)*

XII klasė

101. Iškilojo šešiakampio $ABCDEF$ visos kraštinės lygios 1, o įstrižainės AC, CE ir EA lygios a. Raskite kitas įstrižaines. Kokias reikšmes gali įgyti a? *(4 taškai)*

102. Ar egzistuoja tokie natūralieji skaičiai m ir n ($m > 1, n > 1$), kad $1+2+\cdots+m = 1^2+2^2+\cdots+n^2$? *(4 taškai)*

103. Įrodykite, kad taisyklingojo $2n$-kampio viršūnėse galima taip surašyti natūraliuosius skaičius nuo 1 iki $2n$, kad skaičiai, esantieji diametraliai priešingose viršūnėse, būtų tarpusavyje pirminiai. *(4 taškai)*

104. Į trikampį $A_1B_1C_1$ įbrėžtas apskritimas liečia kraštines taškuose A_2, B_2, C_2. Į trikampį $A_2B_2C_2$ įbrėžtas apskritimas liečia jo kraštines taškuose A_3, B_3, C_3 ir t. t. Įrodykite, kad yra toks n, kad trikampio $A_nB_nC_n$ visi kampai mažesni už 61°. *(5 taškai)*

105. Išspręskite sistemą $\begin{cases} x^2+(y-3)^2=16, \\ (x-8)^2+y^2=25. \end{cases}$ *(3 taškai)*

III ratas

X klasė

106. Su kuriomis q reikšmėmis lygties $x^4-2x^2+q=0$ šaknys sudaro aritmetinę progresiją? *(4 taškai)*

107. Išspręskite sveikaisiais skaičiais lygtį $2x^2y^2+y^2-6x^2-12=0$. *(4 taškai)*

108. Nelygiašonio trikampio ABC kampai tenkina lygybę $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos B}{\cos A}$. Raskite kampą C. *(3 taškai)*

109. Raskite didžiausią natūralųjį skaičių, kuris 19 kartų didesnis už savo skaitmenų sumą. *(4 taškai)*

110. Abi iškilojo keturkampio įstrižainės yra lygios a, o atkarpų, jungiančių priešingų kraštinių vidurio taškus, suma lygi b. Raskite keturkampio plotą. *(5 taškai)*

XI klasė

111. Išspręskite natūraliaisiais skaičiais lygtį $13x^2+17y^2=1989^2$. *(4 taškai)*

112. Į taisyklingąjį šešiakampį, kurio kraštinė lygi 1, įbrėžtas trikampis. Įrodykite, kad mažiausioji trikampio kraštinė ne didesnė už $\sqrt{3}$. *(5 taškai)*

113. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} (x-1)^2y=x^2-2x+9, \\ (y-1)^2x=y^2-2y+9. \end{cases}$ *(3 taškai)*

114. Nelygiašonio trikampio ABC kampai tenkina lygybę $\frac{\sin A}{\sin B}=\frac{\cos B}{\cos A}$. Raskite kampą C. *(3 taškai)*

115. Vienetiniame kvadrate yra 999 taškai. Ar visada galima nubrėžti tokį kvadratą su kraštinėmis, lygiomis 0,4 ir lygiagrečiomis pradinio kvadrato kraštinėms, kad jame būtų bent 112 taškų? *(5 taškai)*

XII klasė

116. Duotas statusis trikampis, kurio statiniai lygūs $\sqrt{5}$ ir $2\sqrt{5}$. Padalykite jį į 5 lygius trikampius. (*4 taškai*)

117. Kiekviename iš languotos 9×9 lentos laukelių tupi vabalas. Po švilpuko kiekvienas iš 81 vabalų nuropoja į vieną iš gretimų (įstrižaine) laukelį. Tada kai kuriuose laukeliuose gali atsirasti po kelis vabalus, o kai kurie laukeliai gali likti laisvi. Raskite didžiausią galimą laisvų laukelių skaičių. (*4 taškai*)

118. Seka (a_n) sudaryta pagal taisyklę $a_{n+2} = \frac{a_{n+1}}{a_n}$, $a_1 = 2$, $a_2 = 3$. Raskite a_{1989}. (*4 taškai*)

119. Raskite visas tokias dviženklių skaičių poras, kad tiek prirašę prie pirmo skaičiaus antrąjį, tiek atėmę iš pirmojo skaičiaus antrąjį gautume pilnuosius kvadratus. (*4 taškai*)

120. Išspręskite sistemą $\begin{cases} xy^2 - 2y + 3x^2 = 0, \\ y^2 + x^2y + 2x = 0. \end{cases}$ (*4 taškai*)

XXXIX OLIMPIADA (1990 m.)

X klasė

121. Tekintojas ištekina detalę per 5 minutes, o šlifuotojas ištekintą detalę nušlifuoja per 5 minutes. Kokią reikia sudaryti ne didesnę kaip 9 darbininkų brigadą, kad ji per trumpiausią laiką pagamintų 121 detalę? Nurodykite trumpiausią laiką ir visas galimas šlifuotojų ir tekintojų brigados sudėtis. (*4 taškai*)

122. Skaičiai a, b ir c tenkina nelygybę $a^2 + ab + ac < 0$. Įrodykite, kad $b^2 > 4ac$. (*4 taškai*)

123. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} \frac{x^2y+xy^2}{xy^2+2x+2y} = \frac{3}{5}, \\ \frac{x^2y+xy^2}{x^2y+2x+2y} = \frac{3}{4}. \end{cases}$ (*4 taškai*)

124. Į trikampį ABC įbrėžtas apskritimas liečia trikampį taškuose K, L ir M. Trikampio KLM kampai yra $50°$, $50°$ ir $80°$. Raskite trikampio ABC kampus. (*4 taškai*)

125. 1000 skirtingų natūraliųjų skaičių suma lygi 1 000 998. Įrodykite, kad tarp tų skaičių yra bent du nelyginiai dėmenys. (*4 taškai*)

XI klasė

126. Tekintojas ištekina detalę per 5 minutes, o šlifuotojas ištekintą detalę nušlifuoja per 30 min. Kokią reikia sudaryti ne didesnę kaip 9 darbininkų brigadą, kad ji per trumpiausią laiką pagamintų: a) 121 detalę; b) 144 detales? Nurodykite trumpiausią laiką ir visas galimas šlifuotojų ir tekintojų brigados sudėtis. (*4 taškai*)

127. Lygčių sistema $\begin{cases} x^2+ax+bc=0, \\ x^2+bx+ca=0, \\ x^2+cx+ab=0 \end{cases}$
sprendinių neturi, tačiau bet kurios dvi jos lygtys turi bendrą sprendinį. Įrodykite, kad $a+b+c=0$. (*4 taškai*)

128. Įrodykite, kad a) lygiašonį; b) bet kurį trikampį, kurio visos kraštinės trumpesnės už $\frac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}$, galima uždengti lygiakraščiu trikampiu, kurio kraštinė lygi 1. (*5 taškai*)

129. Įrodykite, kad $2\cos^2 55^\circ + \sin 20^\circ = 2\cos^2 5^\circ + \cos 1990^\circ$. (*3 taškai*)

130. Kokiais ir kuriais vienodais skaitmenimis gali baigtis dvejeto laipsnis? (*4 taškai*)

XII klasė

131. Su kuriais pirminiais p, q ir natūraliuoju n teisinga lygybė $p+q=(p-q)^n$?
(*5 taškai*)

132. Trapecijos pagrindai a ir b ($a > b$). Tiesė, lygiagreti vienai iš šoninių kraštinių, dalija trapeciją į du lygiapločius keturkampius. Įrodykite, kad $a < 3b$. (*5 taškai*)

133. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x+y=t+z, \\ x^2+y^2=t^2+z^2+2, \\ x^3+y^3=t^3+z^3+9, \\ x^4+y^4=t^4+z^4+29. \end{cases}$ (*4 taškai*)

134. Skaičiai a, b ($b \neq 1$) ir lygties $x^2+ax+1=0$ sprendiniai yra sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad a^2+b^2 — sudėtinis skaičius. (*4 taškai*)

135. Trikampio ABC kraštinė $AC=b$, $AB=c$, o kampo A pusiaukampinė lygi d. Žinoma, kad $\frac{1}{b}=\frac{1}{c}=\frac{1}{d}$. Įrodykite, kad kampas A lygus 120°. (*4 taškai*)

XL OLIMPIADA (1991 m.)

X klasė

136. Kvadratą $n \times n$ sudaro n^2 vienetinių kvadratėlių. Keturiuose kampiniuose kvadratėliuose parašyta po minusą, o visuose kituose — po pliusą. Galima pasirinkti bet kurį kvadratą, sudarytą iš keturių vienetinių kvadratėlių, ir jame pakeisti visus ženklus priešingais. Po to pasirinkti kitą tokį kvadratą 2×2, pakeisti jame ženklus priešingais ir t. t. Ar gali kvadrate nelikti minusų?

137. Įrodykite, kad iškilojo keturkampio kraštinės a, b, c, d tenkina nelygybę

$$-1 < \frac{a^2+b^2-c^2-d^2}{2(ab+cd)} < 1.$$

138. Stačiojo trikampio statiniai a ir b. Kokiu santykiu aukštinė, nuleista į įžambinę, dalija pusiaukraštinę, išvestą į statinį b?

139. Kuriuos natūraliuosius skaičius galima išreikšti kelių (nebūtinai skirtingų) pirminių skaičių kvadratų suma?

140. Raskite sistemos

$$\begin{cases} x + 2y^2 - 3z = 17, \\ x^2 - 3y + 2z = 9 \end{cases}$$

natūraliuosius sprendinius.

XI klasė

141. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (a, b, c), su kuriais teisinga lygybė

$$a^b + b^c = abc.$$

142. Kokias reikšmes gali įgyti realiųjų skaičių suma $x + y$, jei $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{xy} = 1$?

143. Prie trikampio ABC kraštinių AB, BC ir CA į išorę nubrėžti lygiakraščiai trikampiai AMB, BNC ir CKA. Įrodykite, kad $AN = BK = CM$.

144. Ar lygtis $\operatorname{tg} x(\operatorname{tg} x + 2) = 1$ turi racionaliųjų sprendinių (išreikštų laipsniais)?

145. Kvadratą $n \times n$ sudaro n^2 vienetinių kvadratėlių. Keturiuose kampiniuose kvadratėliuose parašyta po minusą, o visuose kituose — po pliusą. Galima pasirinkti bet kurį kvadratą, sudarytą iš keturių vienetinių kvadratėlių, ir jame pakeisti visus ženklus priešingais. Po to pasirinkti kitą tokį kvadratą 2×2, pakeisti jame ženklus priešingais ir t. t. Ar gali kvadrate nelikti minusų?

XII klasė

146. Raskite natūraliuosius lygties $u! = x!+y!+z!+t!$ sprendinius (čia $n! = 1\cdot2\cdot3\cdot\ldots\cdot n$).

147. Skaičius x tenkina lygybę $x^5 - x^3 + x = 2$. Įrodykite, kad $\sqrt[6]{3} < x < \sqrt[6]{4}$.

148. Ar yra toks nelygus konstantai daugianaris p, kuriam nelygybė $p(x) \geqslant 1991p'(x)$ teisinga su visomis realiosiomis x reikšmėmis?

149. Natūraliųjų skaičių aibė A yra tokia, kad kiekvieniems dviem aibės A skaičiams x ir y teisinga nelygybė $|x - y| > \frac{xy}{11}$. Kiek daugiausiai skaičių gali būti aibėje A?

150. Ar gali trikampyje tilpti 100 lygių nesikertančių skritulių, kurių plotų suma didesnė už įbrėžto į trikampį skritulių plotą?

Vilniaus konkurso uždaviniai

IX–X klasės

151. Išspręskite sveikaisiais skaičiais lygtį $x^2yz + 4xy^2z + 16xyz^2 = 1991$.

152. Ar gali pirmųjų n natūraliųjų skaičių suma ($n \geqslant 2$) būti lygi sveikojo skaičiaus kvadratui?

153. Įrodykite, kad lygčių sistemos $\begin{cases} x^3 + 9xy^2 = 2, \\ 3x^2y + 3y^3 = 1 \end{cases}$ sprendinys tenkina lygtį $x^2 - 3y^2 = 1$.

154. Įrodykite, kad keturkampio įstrižainės statmenos tada ir tik tada, kai dviejų priešais esančių kraštinių kvadratų suma lygi kitų dviejų kraštinių kvadratų sumai.

155. Kiek daugiausiai juostelių 1×6 galima iškirpti iš stačiakampio: a) 8×11; b) 8×9?

XI–XII klasės

156. Su kuriomis parametro a reikšmėmis lygčių sistema

$$\begin{cases} (x-2a-1)^2 + y^2 = (a+1)^2, \\ y^2 = 2x \end{cases}$$

turi keturis sprendinius?

157. Raskite lygties $2^k + 1 = n^m$ natūraliuosius sprendinius.

158. Keturkampio $ABCD$ kraštinės $AB = 6$, $BC = 11$, $CD = 8$, $DA = 7$, įstrižainė $AC = 12$. Kokio mažiausio spindulio skrituliu galima uždengti šį keturkampį?

159. Natūraliųjų skaičių seka sudaryta pagal tokią taisyklę: a_{n+1} yra lygus skaičiaus a_n skaitmenų sumai.
a) Raskite mažiausią natūralųjį skaičių a_1, su kuriuo a_5 vienženklis, o a_4 nevienženklis.
b) Raskite didžiausią natūralųjį skaičių a_1, kurio skaitmenys nelygūs nuliui ir su kuriuo a_3 yra vienženklis, o a_2 nevienženklis.

160. Kiek daugiausiai juostelių 1×6 galima iškirpti iš stačiakampio: a) 8×11; b) 8×9?

Kauno konkurso uždaviniai

IX–X klasės

161. Dideliame žemės sklype, kuris yra lygiakraščio trikampio formos, nutarta pastatyti namą ir nuo jo statmenai į kiekvieną trikampio kraštinę nutiesti tiesų taką. Kur reikia statyti namą, kad visų trijų takų ilgių suma būtų mažiausia?

162. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2 + y^2 = x + y, \\ x^4 + y^4 = \frac{(x+y)^2}{2}. \end{cases}$

163. Išskaidykite tiesiniais dauginamaisiais $(x+1)(x+3)(x+5)(x+7) + 15$.

164. Su kuriais sveikaisiais m ir n teisinga lygybė

$$m + n\sqrt{2} = \sqrt{13 + 30\sqrt{2 + \sqrt{9 + 4\sqrt{2}}}}?$$

165. Vaikai paupio smėlyje užrašė UPĖ · UPĖ = ŠEŠUPĖ, net nenujausdami, kad yra tokios raidžių reikšmės, su kuriomis ši lygybė teisinga. Raskite tas raidžių reikšmes, jei skirtingos raidės žymi skirtingus skaitmenis, o vienodos — vienodus.

XI–XII klasės

166. Išspręskite lygtį $(x^2 + 3x - 4)^3 + (2x^2 - 5x + 3)^3 = (3x^2 - 2x - 1)^3$.

167. Apskaičiuokite $x^5 + \frac{1}{x^5}$, kai $x + \frac{1}{x} = a$.

168. Įbrėžto į trikampį apskritimo spindulys lygus 1, o to trikampio kraštinių ilgiai — sveikieji skaičiai. Įrodykite, kad tai skaičiai 3, 4 ir 5.

169. Raskite mažiausią skaitmeniu 6 prasidedantį natūralųjį skaičių, kuris sumažėja 4 kartus skaitmenį 6 nukėlus į skaičiaus galą.

170. Įrodykite, kad $96^n + 725 \cdot 85^n$ dalijasi iš 1991, kai n — nelyginis skaičius.

XLI OLIMPIADA (1992 m.)

X klasė

171. Moksleivis turėjo sudauginti du triženklius skaičius ir sandaugą padalyti iš penkiaženklio skaičiaus. Teisingas rezultatas turėjo būti svaikasis skaičius. Tačiau moksleivis nepastebėjo daugybos ženklo tarp skaičių ir, padalijęs šešiaženklį skaičių iš penkiaženklio, taip pat gavo sveikąjį skaičių, bet 3 kartus didesnį už teisingą rezultatą. Su kokiais trimis skaičiais moksleivis turėjo atlikti veiksmus?

172. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^5 + y^5 = xy + 1, \\ x^3 + y^2 = 0. \end{cases}$

173. Iškilojo keturkapio dviejų priešingų kraštinių ir vienos įstrižainės suma lygi 2. Raskite kitą įstrižainę, jeigu keturkampio plotas lygus $\frac{1}{2}$.

174. Įrodykite, kad egzistuoja be galo daug natūraliųjų n, su kuriais skaičiaus $(50n + 16)^2$ skaitmenų suma sutampa su skaičiaus $(50n + 34)^2$ skaitmenų suma.

175. Seką, sudarytą iš nulių ir vienetų, vadinsime universalia, jeigu joje yra visi galimi trijų greta stovinčių skaitmenų trejetai. Kiek mažiausiai skaitmenų turi universali seka?

XI klasė

176. Įrodykite, kad jei a, b, c, d — natūralieji skaičiai ir $a < b < c < d$, tai

$$\frac{1}{[a, b]} + \frac{1}{[b, c]} + \frac{1}{[c, d]} \leqslant \frac{7}{8};$$

čia $[m, n]$ — natūraliųjų skaičių m ir n mažiausiasis bendrasis kartotinis.

177. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} x^2y^2 - 2x + y^2 = 0, \\ x^2x^2 - 4x + 3 + y^3 = 0. \end{cases}$

178. Kiek daugiausiai realiųjų sprendinių gali turėti lygtis:
1) $|ax + b| + |cx + d| = p(x)$,
2) $|ax + b| - |cx + d| = p(x)$,
kurioje $p(x)$ — kvadratinis trinaris?

179. Įrodykite, kad kiekvienoje begalinėje didėjančioje artimetinėje progresijoje yra narys, kurio pirmieji keturi skaitmenys yra 1992.

180. Trys apskritimai $O_1(r_1)$, $O_2(r_2)$, $O_3(r_3)$, $r_1 < r_2 < r_3$, liečia vienas kitą iš išorės. Dvi lygiagrečios tiesės yra atitinkamai apskritimų $O_1(r_1)$, $O_3(r_3)$, ir $O_2(r_2)$, $O_3(r_3)$ bendrosios liestinės. Įrodykite, kad $r_3 = 2\sqrt{r_1 r_2}$.

XII klasė

181. Ar yra a) smailusis, b) statusis, c) bukasis trikampis, kurio visos kraštinės ir aukštinės — sveikieji skaičiai?

182. Išspręskite sistemą $\begin{cases} x^2 + y^2 + z^6 = 3, \\ x^4 + y^6 + z^2 = 3, \\ x^6 + y^2 + z^4 = 3. \end{cases}$

183. Dvi trikampio aukštinės lygios 1. Kurias reikšmes gali įgyti įbrėžtinio apskritimo spindulys?

184. Realieji skaičiai x ir y tenkina nelygybes $100x(1-y) \leqslant 1$, $100y(1-x) \leqslant 1$. Įrodykite, kad $100x(1-x) \leqslant 1$.

185. Du žaidėjai žaidžia tokį žaidimą. Kiekvienas užrašo po seką, sudarytą iš nulių ir vienetų. Vienu ėjimu abu žaidėjai užbraukia visus priešininko sekos
a) trejetus,
b) ketvertus,
kurie yra ir jo sekoje (skaitmenys gali būti užbraukiami ir po kelis kartus). Po to visi užbraukti skaitmenys nutrinami ir daromas kitas ėjimas. Žaidėjas pralaimi, jei po vieno ar kelių ėjimų jo sekoje neliks skaitmenų, o priešininko sekoje liks. Koks trumpiausias ilgis sekos, kurioje yra ne mažiau kaip keturi skaitmenys ir su kuria žaidėjas niekada nepralaimės?

Vilniaus konkurso uždaviniai

186. Raskite triženklius skaičius $\overline{abc}$, tenkinančius lygybę $\overline{abc} = a! + b! + c!$, čia $m! = 1 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot m$.

187. Išspręskite lygtį $x^2 + \left(\frac{x}{x+1}\right)^2 = 1$.

188. Ar gali kvadratinės lygties su sveikaisiais koeficientais diskriminantas būti lygus 23?

189. Iškilojo keturkampio $ABCD$ kraštinių AB ir CD vidurio taškai atitinkamai yra M ir N. Atkarpos AN ir DM ketrasi taške E, o atkarpos BN ir CM — taške F. Įrodykite, kad
a) $S_{AEM} + S_{CFN} = S_{BFM} + S_{DEN}$; b) $S_{ADE} + S_{BCF} = S_{ENFM}$.

190. Kiekviename lentelės $n \times n$ laukelyje parašytas skaičius 1 arba -1. Po kiekvienu lentelės stulpeliu parašyta to stulpelio visų skaičių sandauga. Kiekvienoje eilutės dešinėje parašyta tos eilutės visų skaičių sandauga. Ar gali visų $2n$ sandaugų suma būti lygi nuliui, kai
a) n — lyginis skaičius; b) n — nelyginis skaičius?

191. Kiek sprendinių intervale $[0; \pi]$ turi lygtis $3\sin x + \sin 3x = 2p$ (sprendinių skaičius priklauso nuo p)?

192. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} \frac{x^2}{y^2} + 2\sqrt{x^2+1} + y^2 = 3, \\ x + \frac{y}{x+\sqrt{x^2+1}} + y^2 = 0. \end{cases}$

193. Į trikampį ABC įbrėžto apskritimo spindulys lygus r. Trys apskritimo liestinės, išvestos lygiagrečiai trikampio kraštinėms, atkerta nuo jo tris trikampius, į kuriuos įbrėžtų apskritimų spinduliai atitinkamai yra r_A, r_B, r_C. Įrodykite, kad $r = r_A + r_B + r_C$.

194. Įrodykite, kad dviejų pavidalo $a^2 + 2b^2$, a, $b \in Z$, skaičių sandauga yra tokio pat pavidalo.

Kauno konkurso uždaviniai

195. Skaičiuje 1992 1992...1992 skaitmenų grupė 1992 kartojasi n kartų. Raskite penkias pirmąsias n reikšmes, su kuriomis šis skaičius dalijasi iš savo skaitmenų sumos.

196. Tarkime, kad x_1 ir x_2 — lygties $ax^2 + bx + c = 0$ $(a \neq 0)$ sprendiniai. Sumą $\frac{1}{x_1^3} + \frac{1}{x_2^3}$ išreikškite lygties koeficientais a, b, c.

197. Yra $2n + 2$ (čia n — natūralusis skaičius) akmenėlių. Įrodykite, kad pasvėrę juos svarstyklėmis (be rodyklių ir svarelių) $3n + 1$ kartų, galėsime išrinkti sunkiausią ir lengviausią akmenėlį.

198. Trikampio ABC kraštinės $BC = a$, $AC = b$, $AB = c$, o kampai A ir B tenkina sąlygą $3A + 2B = 180^\circ$. Įrodykite, kad $a^2 + bc - c^2 = 0$.

199. Kvadrate, kurio kraštinė 1, pažymėtas 51 taškas. Įrodykite, kad tris jų galima uždengti $\frac{1}{7}$ spindulio skrituliu.

200. Apskaičiuokite reiškinio $a^{31} - 74a^{30} + 74a^{29} - \cdots + 74a^{17} - 74a^{16} + 73a^{15} + 15$ reikšmę, kai $a = 73$.

201. Išspręskite lygtį $[x] + \frac{1}{[x]} = \{x\} + \frac{1}{\{x\}}$; čia $[x]$ — sveikoji skaičiaus x dalis, t. y. didžiausias sveikas skaičius, ne didesnis už x; $\{x\}$ — trupmeninė skaičiaus x dalis, t. y. $x - [x]$.

202. Trikampio ABC, kurio $\angle B = 60^\circ$, pusiaukampinės AD ir CE kertasi taške O. Įrodykite, kad $OD = OE$.

203. Matlandijos valstybėje yra 51 miestas. Valstybės teritorija yra kvadratas, kurio kraštinė lygi 1000 km. Valstybė turi lėšų, kurių pakanka nutiesti 11 000 km kelio. Ar gali ji visus miestus sujungti kelių tinklu?

204. Iš taško O nutiesta 12 spindulių S_1, S_2, ..., S_{12}. Kiekvienas spindulys su sekančiu (taip pat S_{12} su S_1) sudaro 30° kampą. Skruzdėlė, stovėjusi spindulio S_1 taške, tam tikru momentu ėmė eiti statmeniu spinduliui S_2. Pasiekusi S_2, ji pasuko ir ėmė eiti statmeniu spinduliui S_3, ir taip toliau. Pirmą kartą apie tašką O ji apėjo (t. y. sugrįžo į spindulį S_1) per 1 min. Kiek laiko prireiks antrą kartą apeiti apie tašką O, jei skruzdėlė visą laiką judės pastoviu greičiu? Kokį atstumą ji įveiks, kol pasieks tašką O, jei pirmosios vijos ilgis lygus a metrų?

XLII OLIMPIADA (1993 m.)

X klasė

205. Skaičiai a, b, c, d sudaro aritmetinę progresiją. Įrodykite, kad ir lygties

$$\frac{1}{x+a}+\frac{1}{x+b}+\frac{1}{x+c}+\frac{1}{x+d}=0$$

sprendiniai sudaro aritmetinę progresiją.

206. Įrodykite nelygybę

$$ab+bc+cd+da+ac+bd<2abcd,$$

jei a, b, c, d — skirtingi natūralieji skaičiai.

207. Stačiojo trikampio ABC plotas lygus 1. Kiekviena jo viršūnė atvaizduojama simetriškai priešingos kraštinės atžvilgiu. Raskite gauto trikampio $A'B'C'$ plotą.

208. Viena kubo siena ištepta dažais. Įrodykite, kad vartant kubą per briaunas galima nudažyti visą plokštumą.

209. Šešiolika skaičių $1, 2, \ldots, 16$ surašomi į kvadratinę lentelę 4×4. Po to kiekvieno mažiausio kvadratėlio viršūnėse esantys keturi skaičiai sudedami, o jų suma parašoma kvadratėlio centre. Parašius visas 9 sumas, pradiniai skaičiai nutrinami. Gauname 9 skaičius, kurie sudaro lentelę 3×3. Toliau procedūra kartojama, gauname lentelę 2×2, o iš jos — vieną skaičių. Kaip reikia surašyti pradinius skaičius, kad paskutinis skaičius būtų didžiausias?

XI klasė

210. Trylika plėšikų šovė vienu metu. Kiekvienas nušovė artimiausią jam plėšiką (arba, jeigu mažiausias atstumas buvo iki kelių plėšikų — tai vieną iš jų). Kiek mažiausiai galėjo būti nušautų plėšikų? (Laikykite, kad plėšikai — skirtingi plokštumos taškai.)

211. Šešiolika skaičių $1, 2, \ldots, 16$ surašomi į kvadratinę lentelę 4×4. Po to kiekvieno mažiausio kvadratėlio viršūnėse esantys keturi skaičiai sudedami, o jų suma parašoma kvadratėlio centre. Parašius visas 9 sumas, pradiniai skaičiai nutrinami. Gauname 9 skaičius, kurie sudaro lentelę 3×3. Toliau procedūra kartojama, gauname lentelę 2×2, o iš jos — vieną skaičių. Kaip reikia surašyti pradinius skaičius, kad paskutinis skaičius būtų didžiausias?

212. a, b ir c — trikampio kraštinės. Kokias reikšmes gali įgyti santykis

$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a):(abc)?$$

213. Realieji skaičiai x, y ir z tenkina nelygybes: $x+y+z \geqslant 1$, $x \leqslant y \leqslant z$. Įrodykite, kad $x^2+3y^2+5z^2 \geqslant 1$.

214. Sveikųjų skaičių aibėje apibrėžtas veiksmas $*$, turintis šias savybes:
a) $x * 0 = x$,
b) $0 * y = -y$,
c) $((x+1) * y) + (x * (y+1)) = 3(x * y) - xy + 2y$.
Raskite $19 * 93$.

XII klasė

215. Sveikųjų skaičių aibėje apibrėžtas veiksmas $*$, turintis šias savybes:
a) $x * 0 = x$,
b) $0 * y = -y$,
c) $((x+1) * y) + (x * (y+1)) = 3(x * y) - xy + 2y$.
Raskite $19 * 93$.

216. Trikampio ABC kampo A pusiaukampinė, kraštinės AC pusiaukraštinė ir iš viršūnės C nuleista aukštinė kertasi viename taške. Įrodykite, kad

$$\operatorname{tg} A = \frac{\sin C}{\cos B}.$$

217. Šešiolika natūraliųjų skaičių sudaro didėjančią geometrinę progresiją. Penki iš jų — devynženkliai, penki — dešimtženkliai, keturi — vienuolikaženkliai ir du — dvylikaženkliai skaičiai. Raskite tą progresiją.

218. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} 2^x \cdot 3^y = 6, \\ 3^x \cdot 4^y = 12. \end{cases}$

219. 170 monetų sudėtos į 9 krūveles, ir kiekvienoje krūvelėje monetų skaičius skirtingas. Įrodykite, kad galima pasirinkti 4 krūveles taip, kad jose būtų daugiau kaip pusė visų monetų.

XLIII OLIMPIADA (1994 m.)

X klasė

220. Su kuriomis sveikosiomis x reikšmėmis $xz + 615$ yra sveikasis dvejeto laipsnis?

221. Plokštumoje pažymėkite 9 skirtingus taškus taip, kad, per kiekvienus du taškus išvedę tiesę, gautume lygiai 27 skirtingas tieses.

222. Raskite $x^2 + y^2$, jei $x^4 - 6x^2y^2 + y^4 = 1$ ir $4x^3y - 4xy^3 = 1$.

223. Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 1. Kraštinės AD tęsinyje pažymėtas taškas E, kraštinės CD tęsinyje — taškas F. Gautojo penkiakampio $ABCEF$ kiekviena įstrižainė lygiagreti jo kraštinei. Raskite penkiakampio kraštines CE, EF ir FA.

224. Teigiamieji skaičiai x ir y tenkina nelygybę $x^2 + xy + y^2 > 3$. Įrodykite, kad bent vienas iš skaičių $x^2 + xy$ ir $y^2 + xy$ yra didesnis už 2.

XI klasė

225. Kokias reikšmes gali įgyti natūraliųjų skaičių suma, jeigu jų sandauga yra lygi 1994^{43}?

226. Trikampio kraštinių ilgiai yra a, b, c, ir $ab + bc + ac = 12$. Įrodykite, kad $6 \leqslant a + b + c < 7$.

227. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} (x+y)(x+z) = x, \\ (y+x)(y+z) = 2y, \\ (z+x)(z+y) = 3z. \end{cases}$

228. Įrodykite, kad lygtis $\{x^2\} + \{x\} - 1 = 0$ neturi racionaliųjų sprendinių (čia $\{x\}$ — skaičiaus x trupmeninė dalis).

229. Kokių iškiliųjų daugiakampių viduje galima rasti tokį tašką, kad jo atstumų iki daugiakampio viršūnių kvadratų suma būtų lygi dvigubam daugiakampio plotui?

XII klasė

230. a) Stačiakampis $m \times n$ $(m, n \in \boldsymbol{N})$ padalytas į mn vienetinių kvadratų. Kelis iš jų kerta stačiakampio įstrižainė?
b) Stačiakampis gretasienis $m \times n \times k$ $(m, n, k \in \boldsymbol{N})$ padalytas į mnk vienetinių kubų. Kelis iš jų kerta stačiakampio gretasienio įstrižainė?

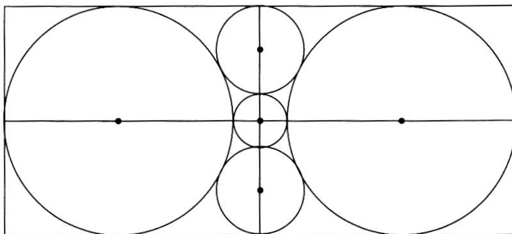
231. Nurodykite 4 skirtingus natūraliuosius skaičius a, b, c, d, kurių sandauga $abcd$ dalijasi iš visų sumų $a+b$, $a+c$, $a+d$, $b+c$, $b+d$, $c+d$, $a+b+c$, $a+b+d$, $a+c+d$, $b+c+d$, $a+b+c+d$.

232. Trikampės piramidės briaunas pažymėkime a, b, c, d, e, f, o jos sienų perimetrus — P_1, P_2, P_3, P_4. Įrodykite, kad

$$\sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2+e^2+f^2} \leqslant \max\{P_1, P_2, P_3, P_4\}.$$

233. Ar egzistuoja tokia funkcija $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$, kad $f(f(x)) = x^3$ su visais $x \in \boldsymbol{R}$?

234. Į stačiakampį įbrėžti penki apskritimai, liečiantys stačiakampį ir vieni kitus kaip parodyta brėžinyje.



Trumpesnioji stačiakampio kraštinė lygi 1. Raskite ilgesniąją stačiakampio kraštinę.

XLIV OLIMPIADA (1995 m.)

X klasė

235. Raskite visas racionaliųjų skaičių poras (x, y), su kuriomis

$$(\sqrt{30} - \sqrt{18})(3\sqrt{x} + \sqrt{y}) = 12.$$

236. Stačiojo trikampio kraštinių ilgiai sudaro aritmetinę progresiją, jo įbrėžtinio apskritimo spindulys lygus r. Raskite progresijos skirtumą.

237. Išspręskite lygčių sistemą $\begin{cases} 10x^2+5y^2+13z^2=12xy+4xz+6yz, \\ x^3+y^3+z^3=-288, \\ x^4+y^4+z^4=1568. \end{cases}$

238. Kvadratas 4×4 padalytas į vienetinius kvadratėlius. Kvadratėlių kraštinėmis eina savęs nekertanti laužtė, kurios kiekvienos grandies ilgis lygus 1. Koks didžiausias galimas laužtės ilgis?

239. Skaičiuokliu galima sudėti, atimti, kelti kvadratu ir rasti skaičiaus atvirkštinį. Ar šiuo skaičiuokliu įmanoma rasti dviejų skaičių sandaugą?

XI klasė

240. Yra 10 natūraliųjų skaičių. Sudėję juos po devynis, gauname tik devynias skirtingas sumas — 86, 87, 88, 89, 90, 91, 93, 94, 95. Raskite tuos skaičius.

241. Kelių mažiausiai natūraliųjų skaičių kvadratų suma galima išreikšti skaičių 1995?

242. a) „Lygiakraščiame trikampyje“

```
* * * * * * * * *
 * * * * * * * *
  * * * * * * *
   * * * * * *
    * * * * *
     * * * *
      * * *
       * *
        *
```

vietoje žvaigždučių taip surašykite skaičius 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, kad kiekvienas skaičius (pradedant antrąja eilute) būtų lygus virš jo esančių dviejų artimiausių skaičių skirtumo moduliui.
b) Ar visada lygiakraščiame trikampyje, kurio kraštinė yra n žvaigždučių, galima reikalaujamu būdu surašyti skaičius $1, 2, 3, \ldots, n$?

243. Funkcija $f : \boldsymbol{N} \to \boldsymbol{N}$ yra tokia, kad $f(f(m)+f(n)) = m+n$ su visais $m, n \in \boldsymbol{N}$ ($\boldsymbol{N} = \{1, 2, \ldots\}$ — natūraliųjų skaičių aibė). Raskite visas tokias funkcijas.

244. Trapecijos $ABCD$ pagrindai $AB = a$, $CD = b$, įstrižainės kertasi taške O. Raskite trikampio ABO ir trapecijos plotų santykį.

XII klasė

245. Nagrinėkime visas skaičių poras $(x; y)$, tenkinančias nelygybes

$$-1 \leqslant x+y \leqslant 1, \quad -1 \leqslant xy+x+y \leqslant 1.$$

Didžiausią galimą x reikšmę pažymėkime M.
a) Įrodykite, kad $M \leqslant 3$.
b) Įrodykite, kad $M \leqslant 2$.
c) Raskite M.

246. Natūralųjį skaičių n vadinsime *valdinguoju*, jei dešimtainėje sistemoje prirašę jį prie bet kurio natūraliojo skaičiaus gauname skaičių, dalų iš n. Raskite:
a) pirmuosius 10 valdingųjų skaičių; b) visus valdinguosius skaičius.

247. Trapecijos plotas lygus 2, o įstrižainių suma — 4. Įrodykite, kad įstrižainės statmenos viena kitai.

248. Ratu surašyti 100 skaičių, kurių suma lygi 100. Bet kurių 6 iš eilės einančių skaičių suma ne didesnė už 6. Pirmas skaičius lygus 6. Raskite kitus skaičius.

249. Įrodykite, kad bet kuriuo laiko momentu perstatę tiek valandinę, tiek minutinę laikrodžio rodyklę simetriškai vertikaliosios (6–12) ašies atžvilgiu, gausime įmanomą rodyklių padėtį. Kiek yra per ciferblato centrą einančių tiesių, kurios pasižymi tokia savybe?

XLV OLIMPIADA (1996 m.)

X klasė

250. Iškilojo šešiakampio $RSTUVZ$ kraštinių ilgių suma lygi P, įstrižainių RU, SV ir TZ ilgių suma — D. Įrodykite, kad

$$\frac{2}{3} < \frac{P}{D} < 2.$$

251. Kiekvienam natūraliajam n visų natūraliųjų skaičių nuo 1 iki n skaitmenų sumų sumą pažymėkime $S(n)$. Raskite $S(1996)$.

252. Ar galima plokštumoje taip nubrėžti a) 5 vienodus apskritimus, b) 6 vienodus apskritimus, kad kiekvienas apskritimas liestų lygiai tris apskritimus?

253. Keliautojas, eidamas iš Vilniaus į Kauną, kiekvieną dieną nueina kaskart vis didesnį atstumą, bet ne daugiau kaip $\frac{2}{3}$ viso kelio. Įrodykite, kad kurios nors dienos pabaigoje jis bus nutolęs nuo abiejų miestų ne mažiau kaip po $\frac{1}{3}$ viso kelio.

254. Trapecijos $ABCD$ pagrindai $AD = 4$, $BC = 2$, šoninė kraštinė $AB = 2$. Raskite visas galimas kampo ACD reikšmes.

XI klasė

255. Įrodykite, kad daugianario $(1 + 2x - x^2 + 3x^3 + 3x^4)^n$, kai $n \geqslant 2$, visi koeficientai teigiami.

256. Skaičius 365 išreikštas kelių skirtingų natūraliųjų skaičių kvadratų suma. Kiek daugiausiai dėmenų gali būti toje sumoje?

257. Ar galima plokštumoje taip nubrėžti a) 5 vienodus apskritimus, b) 6 vienodus apskritimus, kad kiekvienas apskritimas liestų lygiai tris apskritimus?

258. Iš dešimties skaičių rinkinio 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13 reikia taip išbraukti kelis skaičius, kad iš likusių skaičių nebebūtų galima sudaryti sumos, lygios tiksliam kvadratui (t. y. jokių dviejų, trijų, keturių, ..., visų skaičių suma nėra lygi sveikojo skaičiaus kvadratui). Kiek daugiausiai skaičių gali likti rinkinyje?

259. Ant begalinių laiptų n pirmųjų laiptelių padėta po akmenį. Sizifas ir kipšiukas akmenis perkėlinėja pakaitomis. Sizifas savo ėjimu gali perkelti bet kurį pasirinktą akmenį aukštyn iki pirmojo neužimto laiptelio. Kipšiukas savo ėjimu gali bet kurį akmenį nukelti vienu laipteliu žemyn, jei tas laiptelis laisvas (žinoma, jis neturi kur nukelti akmens nuo pirmojo laiptelio). Sizifas pradeda ir stengiasi bent vieną akmenį užkelti kuo aukščiau, o kipšiukas stengiasi Sizifui sutrukdyti.
Ant kelinto laiptelio aukščiausiai Sizifas gali užkelti akmenį, kad ir kaip jam trukdytų kipšiukas?

XII klasė

260. Išspręskite lygtį $x^3 - y^3 = xy + 61$ natūraliaisiais skaičiais.

261. Sekos $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ ir $b_1, b_2, \dots, b_n, \dots$ yra tokios, kad $a_1 > 0$, $b_1 > 0$,

$$a_{n+1} = a_n + \frac{1}{b_n}, \qquad b_{n+1} = b_n + \frac{1}{a_n}, \qquad n \in \boldsymbol{N}.$$

Įrodykite, kad $a_{25} + b_{25} > 10\sqrt{2}$.

262. Du moksleiviai žaidžia tokį žaidimą. Jie pakaitomis vienas po kito vietoje žvaigždučių į sistemą

$$\begin{cases} *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0, \\ *x + *y + *z = 0 \end{cases}$$

įrašinėja skaičius. Pirmasis žaidėjas laimi, jei gautoji lygčių sistema turi nenulinį sprendinį. Ar visada pirmasis žaidėjas gali laimėti?

263. Nustatykite, kiek kraštinių turi į duotąjį apskritimą įbrėžtas daugiakampis, kurio kraštinių ilgių kvadratų suma yra didžiausia.

264. Iš dešimties skaičių rinkinio 2, 3, 5, 6, 7, 8, 10, 11, 12, 13 reikia taip išbraukti kelis skaičius, kad iš likusių skaičių nebebūtų galima sudaryti sumos, lygios tiksliam kvadratui (t. y. jokių dviejų, trijų, keturių, ..., visų skaičių suma nėra lygi sveikojo skaičiaus kvadratui). Kiek daugiausiai skaičių gali likti rinkinyje?

XLVI OLIMPIADA (1997 m.)

X klasė

265. a) Ar galima kvadratą 5×5 visiškai uždengti trimis kvadratais 4×4?
b) Ar galima jį visiškai uždengti trimis kvadratais $3{,}5 \times 3{,}5$?

266. Įrodykite, kad jei a, b, c yra teigiamieji skaičiai ir $ab + bc + ca > a + b + c$, tai $a + b + c > 3$.

267. Iš taisyklingojo penkiakampio viršūnių kaip iš centrų nubrėžti 5 apskritimai, kurių spindulys lygus kraštinės pusei. Po to nubrėžtas stačiakampis, kurio viena kraštinė liečia du apskritimus, o kitos — po vieną iš likusių apskritimų. Kuri stačiakampio kraštinė ilgesnė?

268. Raskite visus natūraliųjų skaičių trejetus (a, b, c), $a < b < c$, tenkinančius lygybę

$$\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=2.$$

269. Natūralųjį skaičių m padauginus iš 2^{11}, gautas vienuolikaženklis skaičius, kurio kiekvienas skaitmuo yra arba 1, arba 2. Raskite skaičių m.

XI klasė

270. Pavidalo $3x^2 + 32y^2$, kur $x, y \in Z$, skaičių aibę pažymėkime S. Įrodykite, kad jei $n \in S$, tai ir $97 \cdot n \in S$.

271. Duotas trikampis, kurio kraštinės yra 5, 12, 13. Kiek yra tiesių, dalijančių pusiau šio trikampio ir perimetrą, ir plotą?

272. Funkcija $f(x)$, apibrėžta realiųjų skaičių aibėje, tenkina tokias sąlygas:
1) $f(x+y) = f(x)f(y)$ su visais x ir y;
2) yra vienintelis toks skaičius x_0, kad $f(x_0) = \sqrt{2}$.
Įrodykite, kad iš lygybės $f(a) = f(b)$ išplaukia, jog $a = b$.

273. Išspręskite lygtį: $x^2 - 4 = \sqrt{x+4}$.

274. Panaikinkite iracionalumą vardiklyje: $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}$.

XII klasė

275. Plokštumoje yra trikampis ir trys stačiakampiai su lygiagrečiomis kraštinėmis. Stačiakampiai visiškai uždengia trikampio kraštines. Įrodykite, jog jie uždengia ir visą trikampį.

276. Plokštumoje yra d tiesių. Taškų, kuriuose susikerta bent trys tiesės, skaičių pažymėkime t. Įrodykite, kad $t \leqslant \frac{d(d-1)}{6}$.

277. Duota 40 natūraliųjų skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$, ne didesnių už 1997. Žinoma, jog bet kurių dviejų skaičių a_i ir a_j mažiausiasis bendrasis kartotinis yra didesnis už 1997. Įrodykite, jog

$$\frac{1}{a_1}+\frac{1}{a_2}+\cdots+\frac{1}{a_{40}}<1.$$

278. Raskite reiškinio $x + y + z - xy - xz - yz$ mažiausią ir didžiausią reikšmę, kai $0 \leqslant x, y, z \leqslant 1$, ir nurodykite visus trejetus (x, y, z), su kuriais jos įgyjamos.

279. Plokštumoje yra 100 taškų, iš kurių jokie trys nėra vienoje tiesėje. Per du taškus einančią tiesę vadiname *mediana*, jei abiejose tiesės pusėse yra po lygiai taškų. Kiek mažiausiai medianų gali turėti tokia sistema? Pateikite pavyzdį, kai tas skaičius pasiekiamas.

XLVII OLIMPIADA (1998 m.)

X klasė

280. Baltas $n \times n$ kvadratas kraštinėms lygiagrečiomis tiesėmis padalytas į n^2 vienetinių kvadratėlių. Atsitiktiniu būdu n vienetinių kvadratėlių nudažomi juodai. Norime iškirpti baltą stačiakampį, kurio kraštinės sutaptų su dalijimo linijomis arba pradinio kvadrato kraštais ir kurio plotas būtų $S \geqslant n$.
Ar visada įmanoma tai padaryti, jei:
a) $n = 7$; b) $n = 8$?

281. Rinkinys, kurį sudaro 1998 skirtingi skaičiai, turi tokią savybę: kiekvieną jo skaičių pakeitę likusiųjų skaičių suma, vėl gauname tą patį skaičių rinkinį.
a) Nurodykite nors vieną tokį rinkinį.
b) Įrodykite, jog bet kurio tokio rinkinio visų skaičių sandauga yra neigiama.

282. Natūraliojo dešimtženklio skaičiaus n pirmas skaitmuo lygus skaičiaus n nulių skaičiui dešimtainėje jo išraiškoje. Antras skaičiaus n skaitmuo lygus vienetų skaičiui, trečias skaitmuo lygus dvejetų skaičiui ir t. t., pagaliau, dešimtas skaičiaus skaitmuo lygus jo devynetų skaičiui. Raskite visus tokius n.

283. Apie trapeciją, kurios aukštinė h, apibrėžtas apskritimas. Trapecijos šoninė kraštinė iš to apskritimo centro yra matoma 60° kampu. Raskite trapecijos plotą.

XI klasė

284. Baltas $n \times n$ kvadratas kraštinėms lygiagrečiomis tiesėmis padalytas į n^2 vienetinių kvadratėlių. Atsitiktiniu būdu n vienetinių kvadratėlių nudažomi juodai. Norime iškirpti baltą stačiakampį, kurio kraštinės sutaptų su dalijimo linijomis arba pradinio kvadrato kraštais ir kurio plotas būtų $S \geqslant n$.
Ar visada įmanoma tai padaryti, jei:
a) $n = 7$; b) $n = 8$?

285. Keturi skirtingi realieji skaičiai a, b, c ir d tenkina sąlygas

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = a, \qquad ac = bd.$$

Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti reiškinys

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}?$$

286. Su kuriais pirminiais skaičiais p reiškinys $\frac{2^{p-1}-1}{p}$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas?

287. Rinkinys, kurį sudaro 1998 skirtingi skaičiai, turi tokią savybę: kiekvieną jo skaičių pakeitę likusiųjų skaičių suma, vėl gauname tą patį skaičių rinkinį.
a) Nurodykite nors vieną tokį rinkinį.
b) Įrodykite, jog bet kurio tokio rinkinio visų skaičių sandauga yra neigiama.

XII klasė

288. Baltas $n \times n$ kvadratas kraštinėms lygiagrečiomis tiesėmis padalytas į n^2 vienetinių kvadratėlių. Atsitiktiniu būdu n vienetinių kvadratėlių nudažomi juodai. Norime iškirpti baltą stačiakampį, kurio kraštinės sutaptų su dalijimo linijomis arba pradinio kvadrato kraštais ir kurio plotas būtų $S \geqslant n$.
Ar visada įmanoma tai padaryti, jei:
a) $n = 7$; b) $n = 8$?

289. Keturi skirtingi realieji skaičiai a, b, c ir d tenkina sąlygas

$$\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{a} = a, \qquad ac = bd.$$

Kokią didžiausią reikšmę gali įgyti reiškinys

$$\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}?$$

290. Funkcija f, apibrėžta natūraliųjų skaičių aibėje N ir įgyjanti reikšmes iš natūraliųjų skaičių aibės N, tenkina tris sąlygas:
(1) $f(xy) = f(x) + f(y) - 1$ su visais natūraliaisiais x ir y;
(2) yra tik baigtinis skaičius tokių natūraliųjų reikšmių x, su kuriomis $f(x) = 1$;
(3) $f(30) = 4$.
Raskite $f(14\,400)$.

291. Nelygiašonio trikampio pusiaukampinė kampą tarp iš to paties kampo išvestų pusiaukraštinės ir aukštinės dalija pusiau. Įrodykite, jog tas trikampis yra statusis.

XLVIII OLIMPIADA (1999 m.)

X klasė

292. Devynženklis skaičius sudaromas iš visų nelygių nuliui devynių skaitmenų, imant kiekvieną skaitmenį po vieną kartą. Visi tokie skaičiai surašyti į seką didėjimo tvarka. Kuris skaičius stovi 362 761-oje vietoje?

293. Trikampio ABC kraštinės a, b, c tenkina sąlygą $a^2 = b(b + c)$. Įrodykite, kad $\angle A = 2\angle B$.

294. a) Realiųjų skaičių a ir b pora $(a; b)$ tenkina lygybę $(a + b)^2 + 1 = (a + 1)(b + 1)$. Ar visada tokia pora tenkina lygybę $a^2(a - 1) = b^2(b - 1)$?
b) Realiųjų skaičių a ir b pora $(a; b)$ tenkina lygybę $a^2(a - 1) = b^2(b - 1)$. Ar visada tokia pora tenkina lygybę $(a + b)^2 + 1 = (a + 1)(b + 1)$?

295. Natūraliojo skaičiaus bet kurių dviejų skirtingų daliklių sandauga yra didesnė už to skaičiaus penktadalį. Raskite visus tokius skaičius.

XI klasė

296. Duota sistema

$$\begin{cases} x^3 - y^2 = z^2 - x, \\ y^3 - z^2 = x^2 - y, \\ z^3 - x^2 = y^2 - z. \end{cases}$$

a) Įrodykite, kad jeigu trejetas $(x_0; y_0; z_0)$ yra sistemos sprendinys, tai $x_0 \geqslant 0$, $y_0 \geqslant 0$, $z_0 \geqslant 0$.

b) Raskite bent du sistemos sprendinius.

c) Išspręskite sistemą.

297. Iš stačiakampio galima iškirpti rombą su įstrižainėmis 6 ir 8. Koks mažiausias galimas tokio stačiakampio plotas?

298. Kvadratas 7×7 padalytas į 49 vienetinius kvadratėlius. Į kiekvieną kvadratėlį įrašytas moduliu ne didesnis už vienetą skaičius taip, kad kiekviename kvadrate 2×2 esančių skaičių suma lygi 0.

a) Pateikite pavyzdį, kai visų parašytų skaičių suma lygi 7.

b) Įrodykite, kad didžiausia galima visų skaičių suma lygi 7.

299. Ant stalo padėtos 6 vienodos monetos, kurios neliečia viena kitos. Monetą vadinsime *laisva*, jei ją galima nustumti nuo stalo neužkliudžius kitų monetų. Kiek mažiausiai iš tų 6 monetų gali būti laisvų?

XII klasė

300. Apskritimo stygos AB ir CD kertasi taške K. Taškas A lanką CAD dalija pusiau. Duota, kad $AK = a$, $KB = b$. Raskite stygos AD ilgį.

301. Kvadratas, kurio kraštinė lygi 1999, padalytas į vienetinius kvadratėlius. Į kiekvieną kvadratėlį įrašytas moduliu ne didesnis už vienetą skaičius taip, kad kiekviename 2×2 dydžio kvadrate esančių skaičių suma lygi 0. Raskite didžiausią galimą visų parašytų skaičių sumos reikšmę.

302. a) Su kuriomis realiosiomis m reikšmėmis sistema

$$\begin{cases} x + y = m, \\ x^3 + y^3 = m, \\ x^5 + y^5 = m \end{cases}$$

turi bent vieną sprendinį?

b) Išspręskite sistemą.

303. Su kuriomis natūraliosiomis n reikšmėmis skaičius $36^n + 24^n - 7^n - 5^n$ dalijasi iš 899?

XLIX OLIMPIADA (2000 m.)

IX–X klasės

304. Šeimoje yra 4 vaikai. Kiekvieno vaiko amžius yra natūralusis skaičius, ne mažesnis už 2 ir ne didesnis už 16, ir visų keturių amžius skirtingas. Prieš metus vyriausiojo vaiko amžiaus kvadratas buvo lygus kitų vaikų amžių kvadratų sumai. Po metų vyriausio ir jauniausio vaikų amžių kvadratų suma bus lygi kitų dviejų vaikų amžių kvadratų sumai. Kiek metų kiekvienam vaikui?

305. Duota seka $a_1, a_2, a_3, \ldots$, kur $a_n = n^2 + n + 1$ bet kuriam $n \geqslant 1$. Įrodykite, kad bet kurių dviejų gretimų sekos narių sandauga taip pat yra sekos narys.

306. Taškas D yra trikampio ABC kraštinės AB vidurio taškas. Taškas E dalija atkarpą BC santykiu $BE : EC = 2 : 1$. Duota, kad $\angle ADC = \angle BAE$. Raskite $\angle BAC$.

307. Raskite visus tokius natūraliųjų skaičių trejetus (x, y, z), $x \leqslant y \leqslant z$, kad skaičius $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z}$ taip pat būtų natūralusis.

XI–XII klasės

308. Trims lakūnams K, L ir M, norintiems tapti bandytojais, buvo surengtos daugiakovės varžybos. Kiekvienoje rungtyje buvo nustatytos I, II ir III vietos. Už I vietą skiriama A taškų, už II vietą — B taškų, už III vietą — C taškų (A, B, C — sveikieji skaičiai, $A > B > C > 0$). Pasibaigus varžyboms, K turėjo 22 taškus, L ir M — po 9 taškus. Reakcijos greičio rungtį laimėjo L. Kuris iš lakūnų užėmė II vietą ištvermės rungtyje?

309. Funkcija $f(x)$, apibrėžta realiųjų skaičių aibėje ir įgyjanti reikšmes iš realiųjų skaičių aibės, su visais x ir y tenkina lygybę

$$(x + y)(f(x) - f(y)) = f(x^2) - f(y^2).$$

a) Nurodykite bent vieną tokią funkciją $f(x)$.
b) Raskite visas tokias funkcijas.

310. Tiesė dalija pusiau ir trikampio perimetrą, ir jo plotą. Įrodykite, kad ji eina per įbrėžtinio apskritimo centrą. Ar teisingas atvirkštinis teiginys?

311. Raskite lygties $x^2 + y^2 + z^2 + u^2 = xyzu + 6$
a) bent vieną sprendinį natūraliaisia skaičiais;
b) bent 33 tokius sprendinius;
c) bent 100 tokių sprendinių.

L OLIMPIADA (2001 m.)

IX–X klasės

312. Raskite
a) bent vieną
b) visas natūraliųjų skaičių poras $(x; y)$, kurioms teisinga lygybė $2^x = y! + 304$ ($y!$, vadinamasis y faktorialas, reiškia natūraliųjų skaičių nuo 1 iki y sandaugą, pvz., $1! = 1$, $2! = 1 \cdot 2$, $5! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5$).

313. Du apskritimai Q ir R kertasi taškuose A ir B. Tašką P pasirenkame tame apskritimo Q lanke AB, kuris yra apskritimo R išorėje. Tiesė PA kerta apskritimą R dar ir taške C, o tiesė PB kerta apskritimą R dar ir taške D. Įrodykite, kad stygos CD ilgis nepriklauso nuo taško P pasirinkimo.

314. Stačiakampis 6×5 sudarytas iš 30 vienetinių kvadratėlių.

a) Užtušuokite tame stačiakampyje 18 kvadratėlių taip, kad kiekviename kvadrate 2×2 būtų ne daugiau kaip du užtušuoti kvadratėliai.

b) Keliais būdais tai galima padaryti?

c) Dabar tame pačiame stačiakampyje užtušuota jau 19 kvadratėlių. Įrodykite, kad jame galima rasti kvadratą 2×2, kurio mažiausiai trys kvadratėliai yra užtušuoti.

315. Raskite, kiek yra keturženklių skaičių, kurių kiekvienas turi tokias savybes:

i) skaičiaus skaitmenys griežtai mažėja;

ii) jeigu skaičiuje yra skaitmuo 8, tai jame nėra skaitmens 1;

iii) jeigu skaičiuje nėra skaitmens 8, tai jame yra skaitmuo 1.

XI–XII klasės

316. Lygtis $x^3+x^2=m$ su tam tikra m reikšme turi tris skirtingus realiuosius sprendinius, kurie sudaro aritmetinę progresiją.

a) Raskite minėtą m reikšmę.

b) Raskite tuos sprendinius.

317. Taškas E yra kvadrato $ABCD$ kraštinėje BC, taškas F yra kraštinėje CD, o kampas EAF yra lygus 45°. Įstrižainė BD kerta atkarpas AE ir AF atitinkamai taškuose P ir Q. Raskite trikampių AEF ir APQ plotų santykį.

318. Stačiakampis $6{\times}5$ sudarytas iš 30 vienetinių kvadratėlių.

a) Užtušuokite tame stačiakampyje 18 kvadratėlių taip, kad kiekviename kvadrate $2{\times}2$ būtų ne daugiau kaip du užtušuoti kvadratėliai.

b) Keliais būdais tai galima padaryti?

c) Dabar tame pačiame stačiakampyje užtušuota jau 19 kvadratėlių. Įrodykite, kad jame galima rasti kvadratą $2{\times}2$, kurio mažiausiai trys kvadratėliai yra užtušuoti.

319. Natūraliųjų skaičių a ir b kvadratų suma a^2+b^2 dalijasi iš 124. Įrodykite, kad ir skaičius $2a+2b$ dalijasi iš 124.

LI OLIMPIADA (2002 m.)

IX–X klasės

320. Trikampio viduje paimtas taškas. Trys tiesės, jungiančios tą tašką su trikampio viršūnėmis, dalija trikampį į 6 trikampes dalis.

a) Duota, kad penkių dalių plotai yra lygūs. Įrodykite, kad visų šešių dalių plotai lygūs.

b) Duota, kad keturių dalių plotai yra lygūs. Ar galima teigti, kad visų šešių dalių plotai lygūs?

321. Lentoje surašyti natūralieji skaičiai nuo 1 iki 100. Leidžiama nutrinti bet kuriuos du skaičius a ir b, o vietoj jų parašyti lentoje pasirinktinai arba $a + b$, arba $a - 5b$, arba $7a - 11b$. Gavus naują rinkinį, su juo vėl kartojama ta pati operacija ir t. t., kol lentoje liks vienas skaičius. Ar gali tas skaičius būti 0?

322. a) Duotas iškilasis keturkampis, kurio kampų didumas laipsniais yra α°, β°, γ°, δ°. Imkime keturias atkarpas, kurių ilgiai yra α cm, β cm, γ cm, δ cm. Ar visada iš jų galima išsirinkti tris, kurios sudaro trikampį?
b) Duotas iškilasis penkiakampis, kurio kampų didumas laipsniais yra α°, β°, γ°, δ°, ε°. Imkime penkias atkarpas, kurių ilgiai yra α cm, β cm, γ cm, δ cm, ε cm. Ar visada iš jų galima išsirinkti tris, kurios sudaro trikampį?

323. a) Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 36 paimami bet kurie trylika skirtingų skaičių. Įrodykite, jog tarp paimtųjų skaičių visada atsiras du tokie, kad jų skirtumas lygus arba 3, arba 4, arba 7.
b) Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 360 paimami bet kurie 121 skirtingų skaičių. Įrodykite, jog tarp paimtųjų skaičių atsiras du tokie, kad jų skirtumas lygus arba 3, arba 4, arba 7.

XI–XII klasės

324. Smailiojo trikampio ABC aukštinės AA_1 ir BB_1 kertasi taške H. Įrodykite, kad $AB^2 = AH \cdot AA_1 + BH \cdot BB_1$.

325. Realieji skaičiai z ir u tenkina nelygybes

$$z^2 \leqslant 4u,$$
$$(z + 100)^2 \leqslant 4(u + 100).$$

Įrodykite, kad z ir u tenkina nelygybes

$$(z + 50)^2 + 50 \leqslant 4(u + 50),$$
$$(z + 99)^2 + 99 \leqslant 4(u + 99).$$

326. Turime keturių skaičių seką 4, 6, 2, 4. Toliau ją pratęsiame kiekvieną kartą prirašydami keturių paskutinių jos narių sumos paskutinį skaitmenį (t. y. gauname seką 4, 6, 2, 4, 6, 8, ...). Įrodykite, kad gautoje sekoje yra vieta, kur paeiliui eina skaitmenys 2, 0, 0, 2.

327. a) Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 36 paimami bet kurie trylika skirtingų skaičių. Įrodykite, jog tarp paimtųjų skaičių visada atsiras du tokie, kad jų skirtumas lygus arba 3, arba 4, arba 7.
b) Iš natūraliųjų skaičių nuo 1 iki 360 paimami bet kurie 121 skirtingų skaičių. Įrodykite, jog tarp paimtųjų skaičių atsiras du tokie, kad jų skirtumas lygus arba 3, arba 4, arba 7.

SPRENDIMAI

XXXV OLIMPIADA (1986 m.)

1. *Pirmas būdas.* Kad būtų lengviau skaičiuoti, pravartu pakeisti $y = x + 1$ (paaiškinti tai lengva: funkcijos $g(x) = x^8 + (x + 2)^8$ grafikas simetriškas tiesės $x = 1$ atžvilgiu, taigi po pakeitimo kairė lygties pusė bus lyginė). Tada gauname lygtį

$$(y + 1)^8 + (y - 1)^8 = 2. \tag{1}$$

Turime: $(y+1)^8 = (y+1)^{2\cdot 2\cdot 2} = (y^2+2y+1)^{2\cdot 2} = (y^4+4y^2+1+4y^3+2y^2+4y)^2 = (y^4+4y^3+6y^2+4y+1)^2 = y^8+16y^6+36y^4+16y^2+1+8y^7+12y^6+8y^5+2y^4+48y^5+32y^4+8y^3+48y^3+12y^2+8y = y^8+8y^7+28y^6+56y^5+70y^4+56y^3+28y^2+8y+1$. Bet $(y - 1)^8 = (-y + 1)^8$, todėl skleidinyje reikia vietoje y imti $-y$:

$$(y - 1)^8 = y^8 - 8y^7 + 28y^6 - 56y^5 + 70y^4 - 56y^3 + 28y^2 - 8y + 1.$$

Gauname lygtį

$$2(y^8 + 28y^6 + 70y^4 + 28y^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow$$
$$y^8 + 28y^6 + 70y^4 + 28y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2(y^6 + 28y^4 + 70y^2 + 28) = 0.$$

Kadangi reiškinys skliaustuose teigiamas, tai $y = 0$, ir $x = y - 1 = -1$.

Antras būdas. (1) lygtyje skleisti $(y + 1)^8$ nebūtina, užtenka suprasti, kad sudauginę 8 skliaustus $y + 1$ gausime narį y^8, laisvąjį narį 1 ir dar narių su neneigiamais (iš tikrųjų — su teigiamais) koeficientais:

$$(y + 1)^8 = y^8 + a_7y^7 + a_6y^6 + \cdots + a_1y + 1.$$

Tada y pakeitę į $-y$ turėsime

$$(y - 1)^8 = y^8 - a_7y^7 + a_6y^6 + \cdots - a_1y + 1.$$

(1) lygtis virsta

$$2(y^8 + a_6y^6 + a_4y^4 + a_2y^2 + 1) = 2 \Leftrightarrow$$
$$y^8 + a_6y^6 + a_4y^4 + a_2y^2 = 0 \Leftrightarrow y^2 = 0 \Leftrightarrow y = 0.$$

Taigi $y = 0$, todėl $x = -1$.

Trečias būdas. Taikysime teoremą: Su bet kuriais a ir b teisinga nelygybė

$$\frac{a^8 + b^8}{2} \geqslant \left(\frac{a + b}{2}\right)^8, \tag{2}$$

o lygybę turime tada ir tik tada, kai $a = b$.

Perrašome pradinę lygtį taip: $x^8 + (2 - x)^8 = 2$. Tada pagal teoremą $x^8 + (2 - x)^8 \geqslant 2\left(\frac{x+2-x}{2}\right)^8$, $x^8 + (2 - x)^8 \geqslant 2$, ir lygybė įmanoma tik kai $x = 2 - x$, t. y. kai $x = 1$. Vadinasi, lygtis turi vienintelį sprendinį.

Minėtą teoremą įrodyti paprasta. Kadangi

$$\frac{a^2 + b^2}{2} \geqslant \left(\frac{a + b}{2}\right)^2 \Leftrightarrow (a - b)^2 \geqslant 0,$$

tai lygybė įmanoma tik kai $a = b$. Remiantis šia nelygybe, $\frac{a^4+b^4}{2} \geqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^2 \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^4$. Pritaikę gautą nelygybę $\frac{x^4+y^4}{2} \geqslant \left(\frac{x+y}{2}\right)^4$, turime $\frac{a^8+b^8}{2} \geqslant \left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)^4 \geqslant \left(\frac{a+b}{2}\right)^8$.

Atsakymas. -1.

2. Pastebime, kad skaičius, kurio visi skaitmenys vienetai, dalijasi iš 11 (arba iš 37, arba iš 41) tik tada, kai jo skaitmenų skaičius lyginis (atitinkamai dalijasi iš 3 arba iš 5). Atėmę iš ieškomojo skaičiaus vienetą ir padalíję iš 10, gausime skaičių, kuris dalijasi iš 11, 37 ir 41, todėl jo skaitmenų skaičius dalijasi iš 2, 3 ir 5, taigi ir iš $2 \cdot 3 \cdot 5 = 30$. Vadinasi, ieškomojo skaičiaus skaitmenų skaičiaus dalybos iš 30 liekana lygi 1. Tokie skaičiai yra 1, 11...1 (31 vienetas), 11...1 (61 vienetas), ... Pirmi du skaičiai netenkina sąlygos, nes jų dalybos iš 9 liekana nelygi 7, o 11...1 (61 vienetas) tinka, kadangi skaičiaus 61 dalybos iš 9 liekana yra 7, taigi ir skaičiaus 11...1 (61 vienetas) dalybos iš 9 liekana yra 7, nes bet kurio skaičiaus ir jo skaitmenų sumos dalybos iš 9 liekana yra ta pati.

Beje, sąlyga, kad ieškomojo skaičiaus dalybos iš 37 liekana yra lygi 1, nereikalinga, nes ji išplaukia iš kitų sąlygų. Iš tikrųjų, jei skaičiaus dalybos iš 9 liekana yra 7, tai jo skaitmenų skaičiaus dalybos iš trijų liekana 1, todėl paties skaičiaus dalybos iš 37 liekana lygi 1.

Atsakymas. 11...1 (61 vienetas).

3. Kadangi taškas P yra kampo, kurį sudaro tiesės m ir MN, pusiaukampinėje, tai taškas P vienodai nutolęs nuo tiesių m ir MN. Lygiai taip pat taškas P vienodai nutolęs nuo tiesių n ir MN. Todėl taškas P vienodai nutolęs nuo tiesių m ir n, taigi taškas P yra vieno iš kampų, kuriuos sudaro tiesės m ir n, pusiaukampinėje.

4. Kadangi $x_n + x_{n+1} + x_{n+2} = x_{n+1} + x_{n+2} + x_{n+3}$, tai $x_n = x_{n+3}$, o tai reiškia, kad kas trečias sekos narys sutampa. Vadinasi, $x_9 = x_6 = x_3 = 9$, $x_{86} = x_{83} = \cdots = x_5 = x_2 = 86$. Todėl seka yra 1, 86, 9, 1, 86, 9, ...

Atsakymas. 1, 86, 9, 1, 86, 9, ...

5. Pažymėkime pirmą skaitmenį po kablelio a. Tada turime lygybę

$$\overline{1,a\ldots} \cdot \overline{2,a\ldots} = \overline{3,a\ldots}\,,$$

o padauginę iš 100, lygybę

$$\overline{1a,\ldots} \cdot \overline{2a,\ldots} = \overline{3a*,\ldots}\,.$$

Jeigu kairės pusės skaičius padidinsime, o dešinės sumažinsime, tai gausime nelygybę

$$(10 + a + 1)(20 + a + 1) \geqslant 300 + 10a \Leftrightarrow$$
$$(11 + a)(21 + a) \geqslant 300 + 10a \Leftrightarrow$$
$$a^2 + 22a \geqslant 69 \Leftrightarrow$$
$$a(a + 22) \geqslant 69.$$

Kadangi a — skaitmuo, o kairė pusė didėjanti funkcija, tai $a \geqslant 3$.

Sumažinę kairės pusės skaičius ir padidinę dešinę pusę, turėsime nelygybę ($*,\ldots \leqslant 9{,}999\ldots = 10$)

$$(10 + a)(20 + a) \leqslant 300 + 10a + 10 \Leftrightarrow a^2 + 20a \leqslant 110 \Leftrightarrow a(a + 20) \leqslant 110.$$

Kairė pusė didėja, todėl $a \leqslant 4$.

Įrodėme, kad a negali būti joks kitas skaitmuo kaip 3 ir 4. Kad šitie skaitmenys po kablelio galėjo stovėti, paprasčiausia įrodyti pavyzdžiais:

$$1{,}39 \cdot 2{,}38 = 3{,}3082; \quad 1{,}4 \cdot 2{,}45 = 3{,}43.$$

Atsakymas. Po kablelio galėjo būti skaitmuo 3 arba 4.

6. Padauginę abi lygybės $\frac{c}{a}+\frac{d}{b}=\frac{1}{ac+bd}$ puses iš $ac+bd$, turime $c^2+\frac{bcd}{a}+\frac{acd}{b}+d^2=1$, o kadangi $c+d=1$, tai $c^2+d^2+\frac{bcd}{a}+\frac{acd}{b}=(c+d)^2 \Leftrightarrow cd\left(\frac{b}{a}+\frac{a}{b}\right)=2cd$. Kadangi $cd\neq 0$, tai $\frac{b}{a}+\frac{a}{b}=2 \Rightarrow a^2+b^2=2ab \Rightarrow (a-b)^2=0 \Rightarrow a=b$.

7. Tarkime priešingai, — kad funkcija $f(x)=\cos x+\cos ax$ yra periodinė. Tai reiškia, jog egzistuoja toks skaičius $T>0$, kad $f(x+T)=f(x)$, t. y.

$$\cos(x+T)+\cos a(x+T)=\cos x+\cos ax$$

su kiekvienu $x\in \boldsymbol{R}$. Imkime $x=0$, tada $\cos T+\cos aT=2$. Kadangi kosinusas ne didesnis už 1, ši lygybė ekvivalenti sistemai

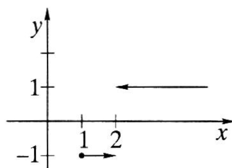
$$\begin{cases}\cos T=1,\\ \cos aT=1;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}T=2k\pi,\\ aT=2m\pi.\end{cases}$$

Iš šios sistemos gauname $a\cdot 2k\pi=2m\pi \Leftrightarrow ak=m$. Kadangi $T>0$, tai ir $k=\frac{T}{2\pi}\neq 0$, o tada $a=\frac{m}{k}$. Bet tai reiškia, jog a yra racionalusis skaičius, — prieštara.

8. Funkcijos apibrėžimo sritis

$$\begin{cases}x-1\geqslant 0,\\ \sqrt{x-1}-1\neq 0,\\ x-2\sqrt{x-1}\geqslant 0;\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant 1,\\ \sqrt{x-1}\neq 1,\\ x\geqslant 2\sqrt{x-1};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant 1,\\ x-1\neq 1,\\ x^2\geqslant 4(x-1);\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\neq 2,\\ (x-2)^2\geqslant 0;\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$\begin{cases}x\geqslant 1,\\ x\neq 2.\end{cases}$$

Apibrėžimo srityje $y=\frac{\sqrt{x-2\sqrt{x-1}}}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{\sqrt{(x-1)-2\sqrt{x-1}+1}}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{\sqrt{(\sqrt{x-1}-1)^2}}{\sqrt{x-1}-1}=\frac{|\sqrt{x-1}-1|}{\sqrt{x-1}-1}$. Vadinasi, kai $\sqrt{x-1}-1>0$ ($\Leftrightarrow \sqrt{x-1}>1 \Leftrightarrow x-1>1 \Leftrightarrow x>2$), tai $y=1$, o kai $\sqrt{x-1}-1<0$ ($\Leftrightarrow 1\leqslant x<2$), tai $y=-1$. Funkcijos y grafikas pavaizduotas paveiksle.



9. Pažymėkime duotuosius taškus A, B, C ir D. Kadangi jie nėra vienoje plokštumoje, tai $ABCD$ — piramidė. Tarkime, kad duotieji taškai vienodai nutolę nuo plokštumos m. Išnagrinėkime visus galimus atvejus.

1) Visi duotieji taškai yra vienoje plokštumos pusėje. Per tašką A išveskime plokštumą, lygiagrečią plokštumai m. Ta plokštuma eis ir per taškus B, C ir D, nes visi duotieji taškai vienodai nutolę nuo plokštumos m. Bet duotieji taškai nėra vienoje plokštumoje, taigi gavome prieštarą.

2) Vienas taškas yra vienoje plokštumos m pusėje, o trys — kitoje pusėje. Jei, pavyzdžiui, taškas A yra vienoje plokštumos m pusėje, o taškai B, C ir D — kitoje pusėje, tai plokštuma m eina per atkarpų AB, AC ir AD vidurio taškus (šie trys taškai skirtingi, nes jie yra skirtingų piramidės $ABCD$ briaunų vidurio taškai). Kadangi iš keturių taškų

pasirinkti vieną tašką galima keturiais būdais, tai šiuo atveju gauname keturias ieškomąsias plokštumas. Pažymėkime M_{XY} atkarpos XY vidurio tašką. Tada ieškomosios plokštumos bus $M_{AB}M_{AC}M_{AD}$, $M_{BC}M_{BD}M_{BA}$, $M_{CD}M_{CA}M_{CB}$ ir $M_{DA}M_{DB}M_{DC}$.

3) Du duotieji taškai yra vienoje plokštumos m pusėje, du — kitoje pusėje. Jei, pavyzdžiui, taškai A ir B yra vienoje plokštumos m pusėje, o taškai C ir D — kitoje pusėje, tai plokštuma m eina per atkarpų AC, AD, BC ir BD vidurio taškus M_{AC}, M_{AD}, M_{BC} ir M_{BD}. (Šie 4 taškai skirtingi, nes jie yra skirtingų piramidės $ABCD$ briaunų vidurio taškai.)

Įrodysime, kad tie 4 taškai tikrai yra vienoje plokštumoje. Atkarpa $M_{AC}M_{AD}$ yra trikampio ACD vidurio linija, todėl $M_{AC}M_{AD} \parallel CD$. Lygiai taip pat $M_{BC}M_{BD} \parallel CD$. Taigi $M_{AC}M_{AD} = M_{BC}M_{BD}$, o dvi lygiagrečios tiesės yra vienoje plokštumoje. (Galima samprotauti ir taip. Tiesės AB ir CD prasilenkiančios, todėl plokštuma m eina per tiesių AB ir CD bendrojo statmens vidurio tašką ir yra lygiagreti tiesėms AB ir CD.)

Keturis duotuosius taškus paskirstyti į dvi poras galima trim būdais: A, B ir C, D; A, C ir B, D; A, D ir B, C. Taigi šiuo atveju gauname tris ieškomąsias plokštumas $M_{AC}M_{AD}M_{BC}$, $M_{AB}M_{AD}M_{CB}$ ir $M_{AB}M_{AC}M_{DB}$.

Vadinasi, iš viso yra 7 ieškomosios plokštumos.

Atsakymas. 7.

10. Kadangi $y = x^2 - 4ax + a^4 = (x - 2a)^2 - 4a^2 + a^4$, tai mažiausia y reikšmė įgyjama, kai $x = 2a$, ir lygi $y_{\min} = a^4 - 4a^2 = a^2(a^2 - 4)$.

Bet $|a| \leqslant 1$, todėl $a^2 - 4 < 0$, $y_{\min} \leqslant 0$, ir $y_{\min}$ didžiausia reikšmė yra 0, kuri pasiekiama, kai $a = 0$.

Atsakymas. Didžiausia $y_{\min}$ reikšmė yra 0.

11. Nagrinėkime 2 atvejus: 1) $y = 1$ ir 2) $y > 1$.

1) atveju turime $x^1 = 1$, t. y. $(x; y) = (1; 1)$.

2) atveju $y \geqslant 2$. Kadangi kairė pusė natūralusis skaičius, tai ir dešinė turi būti natūralusis skaičius. Tai reiškia, kad laipsnio rodiklis $x - y$ neneigiamas, t. y. $x \geqslant y$. Bet jei $y = x$, tai gauname lygtį $x^x = 1$, o ji natūraliųjų skaičių aibėje turi vienintelį sprendinį $x = 1$, nes x^x toje aibėje didėja (beje, funkcija x^x nėra didėjanti teigiamųjų skaičių aibėje!). Bet tada $y = 1$, o ši reikšmė neįeina į dabar nagrinėjamą aibę (ir, be to, jau išnagrinėta!).

Vadinasi, galima laikyti, kad $x > y \geqslant 2$. Perrašykime lygtį taip:

$$\left(\frac{x}{y}\right)^y = y^{x-2y}.$$

Kadangi pagrindas $\frac{x}{y} > 1$, tai kairė pusė didesnė už 1. Bet tada ir dešinė pusė didesnė už 1, o tai reiškia, kad $x > 2y$.

Kadangi dešinė pusė — natūralusis skaičius (natūralusis skaičius, pakeltas natūraliuoju laipsniu), tai ir kairė pusė natūrali. Tai reiškia, kad $\frac{x}{y}$ yra natūralusis skaičius. Iš tikrųjų, tarkime, kad $\frac{x}{y}$ nėra natūralusis skaičius, t. y. $\frac{x}{y} = \frac{m}{n}$ (čia $m, n \in N$, trupmeną $\frac{m}{n}$ galime laikyti nesuprastinama, $n \neq 1$). Tada $\left(\frac{x}{y}\right)^y = \frac{m^y}{n^y}$, trupmena dešinėje nesuprastinama, taigi $\left(\frac{x}{y}\right)^y$ nėra sveikasis skaičius, — prieštara. Pažymėkime $\frac{x}{y} = k$, $k \in N$. Vadinasi, $x = ky$, ir kadangi $x > 2y$, tai $k > 2$.

Įstatę šią x išraišką į pradinę lygtį, gauname

$$(ky)^y = y^{ky-y} \Leftrightarrow k^y y^y = y^{ky-y} \Leftrightarrow k^y = y^{(k-2)y} \Leftrightarrow k = y^{k-2}.$$

Bet $y \geqslant 2$, todėl aišku, kad didelės k reikšmės čia netiks. Kiek sunkiau tai įrodyti.

Kadangi $k = y^{k-2}$, tai $k \geqslant 2^{k-2}$. Kai $k = 3$, nelygybė teisinga $(3 \geqslant 2)$. Kai $k = 4$, nelygybė taip pat teisinga $(4 \geqslant 4)$. Kai $k = 5$, gauname jau neteisingą nelygybę: $5 \geqslant 2^3$. Iš viso, $k < 2^{k-2}$, kai $k \geqslant 5$. Tai įrodyti galima matematinės indukcijos metodu, o galima ir šiek tiek kitaip: $k = \frac{k}{k-1} \cdot \frac{k-1}{k-2} \cdot \ldots \cdot \frac{5}{4} \cdot 4 < 2 \cdot 2 \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 4 = 2^{k-4} \cdot 2^2 = 2^{k-2}$ (arba taip: $2^{k-2} = (2^{k-2} - 2^{k-3}) + (2^{k-3} - 2^{k-4}) + \cdots + (2^4 - 2^3) + (2^3 - 2^2) + 4 = 2^{k-3} + 2^{k-4} + \cdots + 2^3 + 2^2 + 4 > 1 + 1 + \cdots + 1 + 4 = k - 4 + 4 = k$).

Taigi liko išnagrinėti lygtį $k = y^{k-2}$, kai $k = 3, 4$. Kai $k = 3$, tai $y = 3$, o tada $x = ky = 9$. Kai $k = 4$, gauname lygtį $y^2 = 4$. Tada $y = 2$, o $x = ky = 4 \cdot 2 = 8$. Prie gautų sprendinių $(9; 3)$ ir $(8; 2)$ prijungiame anksčiau surastą trečią $(1; 1)$.

Atsakymas. $(1; 1)$, $(8; 2)$, $(9; 3)$.

12. *Pirmas būdas.* Lygybę patogu perrašyti taip: $a_{n+2} - a_{n-1} = 2(a_{n+1} - a_n)$. Pažymėkime $b_n = a_{n+1} - a_n$, tada $b_{n+1} = 2b_n$, todėl $b_n = 2b_{n-1} = 2^2 b_{n-2} = \cdots = 2^{n-2} b_2 = 2^{n-1} b_1$.

Dabar nustatykime duotosios sekos bendrojo nario išraišką: $a_{n+1} = (a_{n+1} - a_n) + (a_n - a_{n-1}) + \cdots + (a_2 - a_1) + a_1 = b_n + b_{n-1} + \cdots + b_2 + b_1 + a_1 = 2^{n-1} b_1 + 2^{n-2} b_1 + \cdots + 2b_1 + b_1 + a_1 = b_1(2^{n-1} + 2^{n-2} + \cdots + 2 + 1) + a_1 = (2^n - 1) b_1 + a_1$.

Bet kadangi $a_2 > a_1$ ir a_1, a_2 — natūralieji skaičiai, tai $b_1 = a_2 - a_1 \geqslant 1$. Todėl $a_{n+1} \geqslant 2^n - 1 + a_1 \geqslant 2^n - 1 + 1 \geqslant 2^n$. Kai $n = 1985$, turime $a_{1986} \geqslant 2^{1985}$.

Antras būdas. Įrodysime tokį gana aiškų teiginį.

Sakykime kad turime seką (a_n), tenkinančią sąlygą. Jeigu pirmą narį a_1 pakeisime skaičiumi $x_1 \geqslant a_1$, antrą narį a_2 pakeisime tokiu skaičiumi x_2, kad būtų $x_2 \cdot x_1 \geqslant a_2 - a_1$, o tolesnius sekos (x_n) narius apibrėšime pagal tą pačią lygybę, tai naujosios sekos nariai gali tik padidėti, t. y. bus $x_n \geqslant a_n$.

Iš tikrųjų, $x_2 - x_1 \geqslant a_2 - a_1$. Kadangi $x_{n+2} - x_{n+1} = 2(x_{n+1} - x_n)$ ir $a_{n+2} - a_{n+1} = 2(a_{n+1} - a_n)$, tai iš nelygybės $x_{n+1} - x_n \geqslant a_{n+1} - a_n$ išplaukia nelygybė $x_{n+2} - x_{n+1} \geqslant a_{n+2} - a_{n+1}$. Remiantis matematinės indukcijos principu, $x_{n+1} - x_n \geqslant a_{n+1} - a_n$.

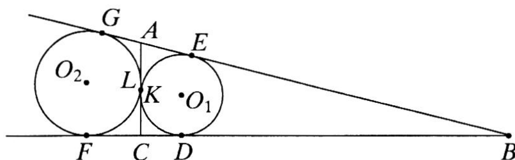
Bet $x_1 \geqslant a_1$, $x_2 = (x_2 - x_1) + x_1 \geqslant a_2 - a_1 + a_1 = a_2$. Kai $n \geqslant 1$, $x_{n+2} = x_{n+1} + 2(x_{n+1} - x_n)$. Tarę, kad $x_{n+1} \geqslant a_{n+1}$, gauname $x_{n+2} \geqslant a_{n+1} + 2(a_{n+1} - a_n)$, t. y. $x_{n+2} \geqslant a_{n+2}$. Remiantis matematinės indukcijos principu, teiginys įrodytas.

Dabar imkime „mažiausią“ seką (a_n); $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n$. Tada $a_3 = 3 \cdot 2 - 2 \cdot 1 = 4$, $a_4 = 3 \cdot 4 - 2 \cdot 2 = 12 - 4 = 8$. Kyla mintis, kad $a_n = 2^{n-1}$. Tarę, kad visiems k, mažesniems už $n + 2$, teisinga lygybė $a_k = 2^{k-1}$, turime: $a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n = 3 \cdot 2^n - 2 \cdot 2^{n-1} = 2^{n-1}(3 \cdot 2 - 2) = 2^{n+1}$, taigi remiantis matematinės indukcijos principu iš tikrųjų $a_n = 2^{n-1}$.

Jeigu dabar imsime bet kurią seką (x_n), tenkinančią uždavinio sąlygą, ir „mažiausią“ seką a_n, tai jos tenkina iš pradžių įrodyto teiginio sąlygas: $x_1 \geqslant a_1 = 1$, nes x_1 natūralusis skaičius: $x_2 - x_1 \geqslant a_2 - a_1 = 1$, nes $x_2 - x_1$ natūralusis skaičius. Vadinasi, $x_{1986} \geqslant a_{1986} = 2^{1985}$. Tai ir reikėjo įrodyti.

13. Žr. 10 uždavinį.

14. O_1 ir O_2 — apskritimų centrai (žr pav.), D, E, F, G, K ir L — apskritimų ir trikampio ABC kraštinių arba jų tęsinių lietimosi taškai. Remiantis liestinių savybėmis, $BE = BD$, $BG = BF$, $EG = BG - BE = BF - BD = DF$, $AE = AK$, $AG = AL$, $CD = CK$, $CF = CL$. Iš čia: $AK + AL = AE + AG = EG = DF = CF + CD = CL + CK$. Kita vertus, $AK + CK = AC = CL + AL$. Sudėję lygybes $AK + AL = CL + CK$ ir $AK + CK = CL + AL$, gauname $AK = CL$.



Kadangi CDO_1K yra kvadratas ($\angle O_1DC = \angle DCK = \angle CKO_1 = 90°$, todėl CDO_1K — stačiakampis, be to, $DO_1 = KO_1 = r$), tai $CD = CK = r$. Lygiai taip pat $CL = CF = R$. Todėl $AC = AK + CK = CL + CK = R + r$.

Taškai O_1 ir O_2 yra kampo B pusiaukampinėje ir $O_1D \parallel O_2F$, taigi trikampiai BO_1D ir BO_2F panašūs. Todėl $O_1D : BD = O_2F : BF$, $r : BD = R : (BD + CD + CF)$, $r : BD = R : (BD + r + R)$, $r(R + r) = BD(R - r)$, $BD = \frac{r(R+r)}{R-r}$, $BC = BD + CD = \frac{r(R+r)}{R-r} + r = \frac{2Rr}{R-r}$.

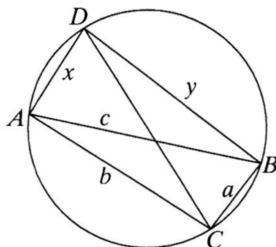
Vadinasi, trikampio ABC plotas lygus $\frac{BC \cdot AC}{2} = \frac{2Rr}{R-r} \cdot \frac{R+r}{2} = \frac{Rr(R+r)}{R-r}$.

Atsakymas. $\frac{Rr(R+r)}{R-r}$.

15. *Pirmas būdas.* Remiantis sinusų teorema $a = 2R\sin A$, $V = 4R^2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2)$. Bet $C = \pi - A - B$, todėl $2(\sin^2 A + \sin^2 B + \sin^2 C - 2) = 1 - \cos 2A + 1 - \cos 2B + 1 - \cos 2C - 4 = -(\cos 2A + \cos 2B + \cos 2C + 1) = -2\cos(A + B)\cos(A - B) - 2\cos^2 C = -2\cos(A + B)\cos(A - B) - 2\cos^2(A + B) = -2\cos(A + B) \cdot (\cos(A - B) + \cos(A + B)) = 2\cos C \cdot 2\cos A \cdot 2\cos B = 4\cos A\cos B\cos C$. Vadinasi, $V = 8R^2\cos A\cos B\cos C$. Jeigu $V > 0$, tai $\cos A\cos B\cos C > 0$, ir visi trikampio kampai smailūs (trikampis negali turėti dviejų bukųjų kampų). Jeigu $V = 0$, tai $\cos A\cos B\cos C = 0$, ir kuris nors trikampio kampas statusis. Jeigu $V < 0$, tai $\cos A\cos B\cos C < 0$, ir vienas iš trikampio kampų bukas.

Beje, iš lygybės $V = 8R^2\cos A\cos B\cos C$ aišku, kad teisingas ir atvirkščias teiginys: jeigu trikampis bukasis, tai $V < 0$, jei statusis, tai $V = 0$, o jei smailusis, tai $V > 0$.

Antras būdas. Laikykime, kad C — didžiausias kampas (žr. pav.). Apibrėžkime apie $\triangle ABC$ apskritimą ir išveskime skersmenį CD. Pažymėkime $AD = x$, $DB = y$.



Tada pagal Pitagoro teoremą $b^2 = 4R^2 - x^2$, $a^2 = 4R^2 - y^2$, todėl $V = a^2 + b^2 + c^2 - 8R^2 = (4R^2 - y^2) + (4R^2 - x^2) + a^2 - 8R^2 = c^2 - x^2 - y^2$. Jei $V > 0$, tai $c^2 > x^2 + y^2$,

todėl $\angle ADB > 90^\circ$ ir $\angle C = 180^\circ - \angle ADB < 90^\circ$, taigi trikampis ABC smailusis. Jei $V = 0$, tai $c^2 = x^2 + y^2$, todėl $\angle ADB = 90^\circ$ ir $\angle C = 90^\circ$. Jei $V < 0$, tai $c^2 < x^2 + y^2$, $\angle ADB < 90^\circ$ ir $\angle C > 90^\circ$.

16. Remsimės dalumo iš 37 požymiu. Suskirstykime skaičių iš dešinės į triženkles grupes (kairiojoje grupėje gali būti ir vienas arba du skaitmenys). Skaičius dalijasi iš 37 tada ir tik tada, kai tų triženklių skaičių suma dalijasi iš 37. Įrodysime šį požymį septynženkliams skaičiams (bendru atveju įrodymas lygiai toks pat). $\overline{abcdefg} - (a + \overline{bcd} + \overline{efg}) = a \cdot 1\,000\,000 + \overline{bcd} \cdot 1000 + \overline{efg} - (a + \overline{bcd} + \overline{efg}) = 999\,999 \cdot a + 999 \cdot \overline{bcd}$. Kadangi 999 dalijasi iš 37 (o 999 999 : 999), tai $999\,999a + 999 \cdot \overline{bcd}$ dalijasi iš 37, taigi skaičiaus $\overline{abcdefg}$ ir atitinkamų triženklių skaičių sumos $a + \overline{bcd} + \overline{efg}$ dalybos iš 37 liekana yra ta pati, vadinasi, kai vienas iš jų dalijasi iš 37, tai ir kitas dalijasi iš 37.

a) Pastebime, kad $9+754+310 = 1073$ dalijasi iš 37 (galima antrą kartą taikyti dalumo požymį: 1073 dalijasi iš 37, nes $1+073 = 74$), todėl 9 754 310 dalijasi iš 37. Skaitmenis, žinoma, galima perstatyti taip, kad ir perstatytas skaičius dalytųsi iš 37. Pavyzdžiui, 9 310 754 dalijasi iš 37, nes $9 + 310 + 754 = 1073$, $1 + 073 = 74$.

b) Remiantis dalumo iš 37 požymiu, reikia iš skaitmenų 8, 7, 5, 4, 3, 1, 0 taip sudaryti vieną vienaženklį ir du triženklius skaičius, kad jų suma dalytųsi iš 37 (arba įrodyti, kad to padaryti neįmanoma). Kitaip sakant, reikia iššifruoti sudėties veiksmą

$$+\begin{array}{r} ABC \\ DEF \\ G \\ \hline \star\star\star \end{array} \quad \text{arba} \quad +\begin{array}{r} ABC \\ DEF \\ G \\ \hline \star\star\star\star \end{array} \qquad (1)$$

kuriame skirtingi skaitmenys A, B, C, D, E, F ir G gali įgyti reikšmes 8, 7, 5, 4, 3, 1, 0, o skaičių suma (ją vadinsime tiesiog suma) dalijasi iš 37.

Raskime sumos dalybos iš 9 liekaną. Kadangi $\overline{ABC}+\overline{DEF}+G-(8+7+5+4+3+1+0) = \overline{ABC}+\overline{DEF}+G-(A+B+C+D+E+F+G) = 99(A+D)+9(B+E)$ dalijasi iš 9, tai sumos $\overline{ABC} + \overline{DEF} + G$ dalybos iš 9 liekana yra tokia pat, kaip ir skaičiaus $8+7+5+4+3+1+0 = 28$. Vadinasi, sumos dalybos iš 9 liekana lygi 1. Kadangi suma dalijasi iš 37, tai ji yra pavidalo $37m$, o kadangi jos dalybos iš 9 liekana yra 1, tai suma gali įgyti tik reikšmes $37(9k + 1)$, $k \in N_0$. (Iš tikrųjų, kadangi $37m - m = 36m$ dalijasi iš 9, tai skaičiaus $37m$ ir m dalybos liekana iš 9 ta pati. Vadinasi, $m = 9k + 1$.) Tos reikšmės yra 37, $37(9+1) = 370$, $37(2 \cdot 9+1) = 703$, $37(3 \cdot 9+1) = 1036$, $37(4 \cdot 9+1) = 1369$, $37(5 \cdot 9+1) = 1702$ ir t.t. Bet iš (1) matome, kad reikšmė 37 per maža, o reikšmė 1702 jau per didelė ($\overline{ABC} + \overline{DEF} + G < 875 + 785 + 8 < 1702$). Vadinasi, lieka 4 sumos reikšmės: 370, 703, 1036, 1069. Norėdami galime patikrinti visas tas reikšmes ir rasti visas įmanomas pradinio skaičiaus perstatas. Šiaip užtenka rasti bent vieną perstatą, o ją gauname jau paėmę pirmą sumos reikšmę 370:

$$+\begin{array}{r} ABC \\ DEF \\ G \\ \hline 3\,7\,0 \end{array}$$

Aišku, kad $A + D \leqslant 3$, o kadangi $\overline{BC} + \overline{EF} + G < 200$, tai $A + D \geqslant 2$, todėl A ir D gali būti tik 3 ir 0 (primename, kad skaitmuo 2 į pradinį skaičių neįeina). $B + E \leqslant 7$, todėl B ir E gali būti tik 4 ir 1 arba 5 ir 1. 5 ir 1 netinka, nes likusių skaitmenų suma $8 + 7 + 4$ nesibaigia nuliu. 4 ir 1 tinka:

$$\begin{array}{r} 348 \\ +\;017 \\ 5 \\ \hline 370 \end{array}$$

Taigi perstatę skaičiaus 8 754 310 skaitmenis, gavome skaičių 5 348 017, kuris dalijasi iš 37.

Atsakymas. a) Galima; b) galima.

17. *Pirmas būdas.* Galima vieną kintamąjį pakeisti kitu. Kadangi $x = 1$ netenkina pirmos lygties, tai ją galima dalyti iš $1 - x^2$ ir išsireikšti $y = 2x(1 - x^2)$. Įstatę į antrą lygtį, turime: $\left(1 - \frac{4x^2}{(1-x^2)^2}\right)x = \frac{4x}{1-x^2}$. Nagrinėjame du atvejus: 1) $x = 0$ ir 2) $x \neq 0$. 1) atveju gauname $y = 0$ ir sprendinį $(0; 0)$. 2) atveju prastiname lygtį iš $x \neq 0$: $1 - \frac{4x^2}{(1-x^2)^2} = \frac{4}{1-x^2}$. Padauginę iš $(1 - x^2)^2$, gautume bikvadratinę lygtį, bet dar paprasčiau iš karto pasižymėti $1 - x^2 = u$. Tada $x^2 = 1 - u$ ir turime lygtį $1 - \frac{4(1-u)}{u^2} = \frac{4}{u} \Leftrightarrow u^2 - 4 + 4u = 4u \Leftrightarrow u^2 = 4 \Leftrightarrow u \pm 2$. Taigi $x^2 = -1$ arba $x^2 = 3$. Pirma lygtis sprendinių neturi, antra duoda $x = \pm\sqrt{3}$. Prisiminę y išraišką, turime $y = \frac{2x}{1-x^2} = \frac{2x}{1-3} = \frac{2x}{-2} = -x = \mp\sqrt{3}$, t. y. dar du sprendinius $(\sqrt{3}; -\sqrt{3})$ ir $(-\sqrt{3}; \sqrt{3})$.

Antras būdas. Pirmasis būdas netinka, jei spręstume analogišką ciklinę sistemą, tik jau su 3 kintamaisiais:

$$\begin{cases} (1 - x^2)y = 2x, \\ (1 - y^2)z = 2y, \\ (1 - z^2)x = 2z. \end{cases}$$

Išspręskime ją. Perrašykime ją taip:

$$\begin{cases} y = \frac{2x}{1-x^2}, \\ z = \frac{2y}{1-y^2}, \\ x = \frac{2z}{1-z^2}. \end{cases}$$

Čia reikia atpažinti trigonometrijos formulę $\operatorname{tg} 2\alpha = \frac{2\operatorname{tg}\alpha}{1-\operatorname{tg}^2\alpha}$ ir pakeisti $x = \operatorname{tg}\alpha$. Tada pirma lygtis virsta $y = \operatorname{tg} 2\alpha$, antra lygtis $z = \operatorname{tg} 4\alpha$, trečia lygtis $\operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg} 8\alpha$. Iš jos gauname $8\alpha = \alpha + k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$, t. y. $\alpha = \frac{k\pi}{7}$, ir $x = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{7}$. Užtenka imti $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$, — po to reikšmės pradeda kartotis. Taigi turime 7 šaknis: $x = \operatorname{tg}\frac{k\pi}{7}$ ir atitinkamai 7 sprendinius: $(x; y; z) \in \{(\operatorname{tg}\frac{k\pi}{7}; \operatorname{tg}\frac{2k\pi}{7}; \operatorname{tg}\frac{4k\pi}{7}) \mid k \in \mathbf{Z}, 0 \leqslant k \leqslant 6\}$.

Įdomu pastebėti, kad jeigu sistemą (su 3 kintamaisiais) tenkina trejetas $(a; b; c)$, tai ją tenkina ir trejetai, gauti cikliškai perstačius pirmąjį (a pakeitus į b, b pakeitus į c ir c pakeitus į a, po to tą patį padarius dar kartą), taip pat trys trejetai, kuriuos gauname pakeitę tų trejetų kiekvienos komponentės ženklus. Kitaip sakant, jeigu $(a; b; c)$ yra sistemos sprendinys, tai sprendiniai yra ir $(b; c; a)$, $(c; a; b)$, $(-a; -b; -c)$, $(-b; -c; -a)$, $(-c; -a; -b)$.

Išrašykime mūsų gautus 7 sprendinius išreikštine forma ir redukuokime kampus į I ketvirtį. Gauname:

$$(x;y;z)\in\Big\{(0;0;0),\Big(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7};\ \operatorname{tg}\frac{2\pi}{7};\ -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}\Big),\Big(\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7};\ -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7};\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\Big),$$
$$\Big(\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7};\ -\operatorname{tg}\frac{\pi}{7};\ -\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\Big),\Big(-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7};\ \operatorname{tg}\frac{\pi}{7};\ \operatorname{tg}\frac{2\pi}{7}\Big),$$
$$\Big(-\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7};\ \operatorname{tg}\frac{3\pi}{7};\ -\operatorname{tg}\frac{\pi}{7}\Big),\Big(-\operatorname{tg}\frac{\pi}{7};\ -\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7};\ \operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}\Big)\Big\}.$$

Nulinis sprendinys $(0;0;0)$ perstatytas naujų sprendinių neduoda, o iš sprendinio $(\operatorname{tg}\frac{\pi}{7};\ \operatorname{tg}\frac{2\pi}{7};\ -\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7})$ perstatydami ir po to keisdami ženklus iš tikrųjų gauname visus kitus 5 sprendinius.

Vadinasi, visų sprendinių aibę galima užrašyti trumpiau:

$$(x;y;z)\in\Big\{(0;0;0),(a;b;c),(b;c;a),(c;a;b),(-a;-b;-c),$$
$$(-b;-c;-a),(-c;-a;-b)\ |\ a=\operatorname{tg}\frac{\pi}{7},b=\operatorname{tg}\frac{2\pi}{7},c=-\operatorname{tg}\frac{3\pi}{7}\Big\}.$$

Grįžkime prie pradinės sistemos. Pažymėję $x=\operatorname{tg}\alpha$, iš pirmos lygties turime $y=\operatorname{tg}2\alpha$, iš antros lygties $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}4\alpha\Rightarrow 4\alpha+\alpha+k\pi\Rightarrow\alpha=\frac{k\pi}{3}$, ir $x=\operatorname{tg}\frac{k\pi}{3}$. Vadinasi, kaip ir turėjo būti, gauname x reikšmes 0, $\sqrt{3}$ ir $-\sqrt{3}$.

Atsakymas. $(0;0)$, $(\sqrt{3};-\sqrt{3})$, $(-\sqrt{3};\sqrt{3})$.

18. Ekvivalenčiai pertvarkome pradinę nelygybę L — abi puses dauginame iš visų vardiklių sandaugos (tai daryti galima, nes kiekvienas vardiklis teigiamas) $3(a^2-2a+2)(a^2+2a+2)=3(a^2+2-2a)(a^2+2+2a)=3(a^2+2)^2-3\cdot4a^2=3(a^4+4)$:

$$L\Leftrightarrow 3(a^2+2a+2+a^2-2a+2)<4(a^4+4)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow 4(a^4+4)>3(2a^2+4)\Leftrightarrow a^4+4>3\Big(\frac{a^2}{2}+1\Big)\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^4-\frac{3a^2}{2}+1>0\Leftrightarrow\Big(a^2-\frac{3}{4}\Big)^2+1-\frac{9}{16}>0\Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow\Big(a^2-\frac{3}{4}\Big)^2+\frac{7}{16}>0.$$

Bet ši nelygybė akivaizdi.

19. Panašius uždavinius sprendžiame taip: kol galime, vienareikšmiškai nustatinėjame skaitmenis. Kai tai nebepavyksta, nagrinėjame kiekvieną galimybę atskirai.

Iš karto matome, kad IV eilutės paskutinis skaitmuo yra 0.

Galima nustatyti II eilutės trečią skaitmenį. V eilutė rodo, kad 3 padauginę iš I eilutės skaičiaus, gauname keturženklį skaičių; tai reiškia, kad minėtas skaitmuo yra mažesnis už 3, nes jo ir pirmo dauginamojo sandauga triženklė. Bet tas skaitmuo, aišku, ne 0, o 1 negali būti todėl, kad tada I eilutės antras skaitmuo turėtų būti 3. Vadinasi, II eilutės trečias skaitmuo 2.

Dabar aišku, kad I eilutės pirmas skaitmuo yra 4: pagal sąlygą tai negali būti 3, o mažesnis už 3 jis taip pat negali būti, nes tada V eilutės sandauga būtų mažesnė už $3 \cdot 300 = 900$ ir nebūtų keturženklė. Taip pat jis negali būti 5 ar daugiau — tada III eilutės skaičius būtų ne mažesnis už $500 \cdot 2$, t. y. keturženklis.

Gavome tokį užrašą:

$$\begin{array}{rcccccc}
\times & & & & 4 & \star & \star \\
 & & & & 3 & \star & 2 \\ \hline
 & & & & \star & 3 & \star \\
+ & & \star & \star & \star & 0 & \\
 & \star & \star & \star & \star & & \\ \hline
 & \star & \star & \star & \star & 3 & \star
\end{array}$$

Dabar jau sunku vienareikšmiškai nustatyti kurį nors dauginamųjų skaitmenį (beje, galima būtų įrodyti, kad I dauginamojo antras skaitmuo yra 1, bet paprasčiau daryti kiek kitaip).

Kadangi I eilutės trečio skaitmens ir II eilutės antro skaitmens sandauga baigiasi 0, tai bent vienas iš tų skaitmenų yra 0 arba 5. II eilutės antras skaitmuo negali būti 0, nes tada neturėtume dalinės sandaugos IV eilutėje. I eilutės trečias skaitmuo negali būti 0, nes tada trečioje eilutėje (2 ir pirmo dauginamojo sandaugos) antras skaitmuo būtų lyginis, o ne 3. Vadinasi, vienas iš tų skaitmenų būtinai yra 5. Skirkime 2 atvejus.

1) atvejis. I eilutės paskutinis skaitmuo yra 5. Tada III eilutės (ir VI eilutės) paskutinis skaitmuo 0, ir turime užrašą:

$$\begin{array}{rcccccc}
\times & & & & 4 & \star & 5 \\
 & & & & 3 & \star & 2 \\ \hline
 & & & & \star & 3 & 0 \\
+ & & \star & \star & \star & 0 & \\
 & \star & \star & \star & \star & & \\ \hline
 & \star & \star & \star & \star & 3 & 0
\end{array}$$

Kadangi $\overline{4a5} \cdot 2$ turi baigtis skaitmenimis 30, tai $2a$ turi baigtis 2, t. y. $a = 1$ arba $a = 6$. Bet $a = 6$ būti negali: $465 \cdot 3 = 1395$, ir V eilutėje tektų rašyti 3, o tai sąlyga draudžia. Vadinasi, pirmas dauginamasis yra 415. Antro dauginamojo antras skaitmuo lyginis, nes jo ir 5 sandauga baigiasi 0. Jis didesnis už 2, nes $415 \cdot 2 = 830$ yra triženklis skaičius. Jis nelygus 8, nes tada IV eilutėje atsirastų trejetų. Vadinasi, tai 4 arba 6. Patikrinę matome, kad abi galimybės $415 \cdot 342$ ir $415 \cdot 362$ įmanomos.

2) atvejis. II eilutės antras skaitmuo yra 5. Turime užrašą

$$\begin{array}{rcccccc}
\times & & & & 4 & \star & \star \\
 & & & & 3 & 5 & 2 \\ \hline
 & & & & \star & 3 & \star \\
+ & & \star & \star & \star & 0 & \\
 & \star & \star & \star & \star & & \\ \hline
 & \star & \star & \star & \star & 3 & \star
\end{array}$$

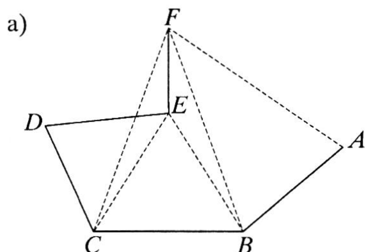
Kaip ir anksčiau, kadangi $4\star\star \cdot 2 = \star 3 \star$, tai I eilutės antras skaitmuo gali būti tik 1 arba 6. Bet 6 netinka, nes tada sandaugoje $46\star \cdot 5$ (IV eilutė) atsirastų trejetas. Vadinasi, I eilutės antras skaitmuo yra 1. I eilutės trečias skaitmuo yra ne mažesnis už 5 (priešingu atveju dauginant $41\star \cdot 2$ vietoje 3 III eilutėje stovėtų skaitmuo 2) ir lyginis (nes jo ir 5 sandauga, kaip matome iš IV eilutės, baigiasi 0). Vadinasi, tai 6 arba 8. Patikrinę nustatome, kad abi galimybės $416 \cdot 352$ ir $418 \cdot 352$ tinka.

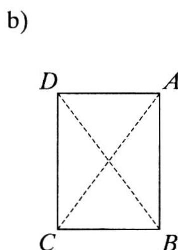
Atsakymas. Yra 4 sprendiniai:

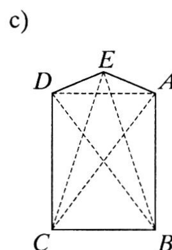
$$\begin{array}{r} 415 \\ \times\ 342 \\ \hline 830 \\ +\ 1660 \\ 1245 \\ \hline 141930 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 415 \\ \times\ 362 \\ \hline 830 \\ +\ 2490 \\ 1245 \\ \hline 150230 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 416 \\ \times\ 352 \\ \hline 832 \\ +\ 2080 \\ 1248 \\ \hline 146432 \end{array} \qquad \begin{array}{r} 418 \\ \times\ 352 \\ \hline 836 \\ +\ 2090 \\ 1254 \\ \hline 147136 \end{array}$$

20. a) Tarkime priešingai, kad yra toks iškilasis daugiakampis $ABCDEF$..., turintis ne mažiau kaip 6 viršūnes, kad $BC = 1$ ir kiekvienos įstrižainės ilgis — sveikasis skaičius (žr. a) pav.). Trikampyje BCE kraštinė $BC = 1$, o kraštinių CE ir BE ilgiai sveikieji skaičiai, nes CE ir BE yra daugiakampio įstrižainės.

Remiantis trikampio nelygybe, $|CE - BE| < BC$. Kairėje pusėje yra sveikasis neneigiamas skaičius, o dešinė pusė lygi 1, todėl $|CE - BE| = 0$, $CE = BE$. Lygiai taip pat $CF = BF$. Taigi viršūnės E ir F yra kraštinės BC vidurio statmenyje. Bet tada viršūnės B ir C yra skirtingose tiesės EF pusėse, o EF yra daugiakampio kraštinė. Vadinasi, daugiakampis nėra iškilas (primename, kad daugiakampis vadinamas iškiluoju, jei jis yra vienoje pusplokštumėje nuo kiekvienos tiesės, kurioje yra jo kraštinė). Gavome prieštarą, todėl tokio daugiakampio nėra, t. y. $n \leqslant 5$.



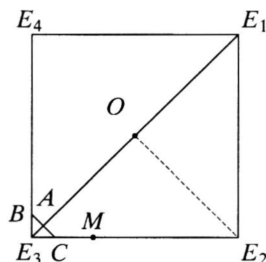




b) Reikiamą keturkampį sugalvoti nesunku. Pavyzdžiui, stačiakampis $ABCD$, $BC = 1$, $AC = BD = 2$, tenkina uždavinio sąlygas (žr. b) pav.).

c) Iš stačiakampio $ABCD$ (žr. b) pav.) lengvai gauname reikiamą penkiakampį: pažymime tokį tašką E, kad $BE = CE = 2$ (žr. c) pav.). Tada $ABCDE$ — iškilasis penkiakampis, kraštinė $BC = 1$, įstrižainė $AD = 1$, o kitos įstrižainės $AC = BD = BE = CE = 2$.

21. Įrodysime, kad kiškis gali išbėgti iš sodo. Vaizdžiai kalbant, kiškis turi bėgti įstrižaine tiesiai į kurį nors vilką, o paskutinius žingsnius pasukti statmenai įstrižainei į tą kraštinę, kurioje nėra pasirinkto vilko (ir į bet kurią kraštinę, jei vilkas yra kvadrato kampe).



Padarykime brėžinį. Sakykime, kad kvadrato kraštinės ilgis 1, vilkai V_1, V_2, V_3 ir V_4 yra atitinkamai viršūnėse E_1, E_2, E_3 ir E_4. Kiškis bėga kvadrato įstrižaine (pvz., į vilką V_3) iki taško A, o tada pasuka statmenai įstrižainei į vieną iš kraštinių (priklausomai nuo V_3) ir išbėga taške B arba taške C.

Nustatykime, kaip pasirinkti tašką A, kad kiškio nepavytų vilkas V_4 (taip pat ir V_2). Kadangi $AB = AC = AE_3$, tai kiškio kelias lygus $OE_3 = \frac{\sqrt{2}}{2}$. Per tą patį laiką vilkas

gali nubėgti tik $\frac{\sqrt{2}}{2}\cdot 1{,}4$ atstumą, t. y. V_4 gali atbėgti tik iki taško M ($E_4M = 0{,}7\sqrt{2} = \sqrt{0{,}98} < 1$). Vadinasi, jei taškas C yra kairiau taško M, tai V_4 kiškio nepavys. Taip bus, kai $E_4C > E_4M$, o iš panašiųjų trikampių $\frac{OA}{OE_3} = \frac{E_4C}{E_4E_3} > E_4M = 0{,}7\sqrt{2}$.

Lygiai taip pat nepavys kiškio ir vilkas V_2. Juo labiau nepavys kiškio vilkas V_1. Liko nurodyti, kaip pabėgti nuo vilko V_3. Jeigu tuo momentu, kai kiškis bus taške A, vilkas bus kraštinėje E_3E_2, tai kiškis turi sukti į tašką C. Per tą laiką, kol kiškis bėgs iš A į C, vilkas V_3 gali nubėgti tik atstumą 1, $AC < E_3C = AC\sqrt{2}$, taigi V_3 kiškio nepavys. Panašiai kiškis pabėgs per tašką B, jei V_3 bus kraštinėje E_3E_4. Jei V_3 kiškio posūkio momentu bus viršūnėje E_3, tai kiškis gali bėgti tiek į B, tiek į C.

Atsakymas. Gali (pavyzdžiui, kiškis gali bėgti įstrižaine į kurį nors vilką daugiau kaip $0{,}35\sqrt{2}$ ($\approx 0{,}495$) visos įstrižainės, o paskui pasukti stačiu kampu tolyn nuo to vilko).

22. Raskime nelygybės apibrėžimo sritį: $x^4 - 5x^2 + 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow (x^2-1)(x^2-4) \geqslant 0$.

Šią nelygybę tenkina reikšmės $x^2 \geqslant 4$ ir $x^2 \leqslant 1$, t. y. $x \in (-\infty; -2]\cup[-1; 1]\cup[2; +\infty)$.

Pasižymėkime $u = 2x^3-x^2-5x-2$, $v = 2x^3+3x^2-3x-2$, $t = (2x+1)\sqrt{x^4-5x^2+4}$. Kadangi kosinusas moduliu ne didesnis už 1, tai kairė nelygybės pusė ne didesnė už 3, ir gali būti lygi 3 tik tada, kai kiekvienas dėmuo lygus 1, t. y. kai

$$\begin{cases} \cos u = 1, \\ \cos v = 1, \\ \cos t = -1. \end{cases} \tag{1}$$

Jeigu tokių x reikšmių yra, tai jas reikės išmesti iš apibrėžimo srities.

Matome, kad turi būti $u = 2k\pi$, $v = 2m\pi$, $t = (2n+1)\pi$, $k, m, n \in Z$. Kita vertus, kadangi daugianaris u turi šaknį $x = -1$, o daugianaris v šaknį $x = 1$, tai juos lengva išskaidyti: $u = 2x^3+2x^2-3x^2-3x-2x-2 = (x+1)(2x^2-3x-2) = (x+1)(2x+1)(x-2)$, $v = 2x^3-2x^2+5x^2-5x+2x-2 = (x-1)(2x^2+5x+2) = (x-1)(2x+1)(x+2)$, $t = (2x+1)\sqrt{(x^2-1)(x^2-4)}$. Pastebime, kad apibrėžimo srityje $uv = t^2$, todėl turi būti

$$2k\pi \cdot 2m\pi = (2n+1)^2\pi^2, \qquad 4km = (2n+1)^2.$$

Bet paskutinės lygybės kairė pusė yra lyginis skaičius, o dešinė — nelyginis. Vadinasi, (1) sistema sprendinių neturi.

Atsakymas. $x \in (-\infty; -2] \cup [-1; 1] \cup [2; +\infty)$.

23. Kadangi kintamųjų „daug“, tai galima du iš jų eliminuoti. Pradinė sistema L ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases} a + \frac{1}{b} = p, \\ b + \frac{1}{c} = p, \\ c + \frac{1}{a} = p. \end{cases} \tag{1}$$

Iš trečios lygybės $c = p - \frac{1}{a} = \frac{ap-1}{a}$. Iš pirmos lygybės $\frac{1}{b} = p - a$, $b = \frac{1}{p-a}$. Tada iš antros lygybės $\frac{1}{p-a} + \frac{a}{ap-1} = p \Rightarrow ap - 1 + a(p-a) = p(p-a)(ap-1) \Leftrightarrow 2ap - 1 - a^2 = p(ap^2 - a^2 - p + a) \Leftrightarrow ap^3 - a^2p^2 - p^2 - ap + 1 + a^2 = 0 \Leftrightarrow ap(p^2-1) - a^2(p^2-1) - (p^2-1) = 0 \Leftrightarrow (ap - a^2 - 1)(p^2-1) = 0$. Nagrinėjame du atvejus: 1) $ap - a^2 - 1 = 0$, 2) $p^2 - 1 = 0$.

1) atveju $p = a + \frac{1}{a}$, bet taip pat $p = a + \frac{1}{b}$, taigi $a + \frac{1}{a} = a + \frac{1}{b} \Rightarrow a = b$, o tai prieštarauja sąlygai, kad skaičiai a, b ir c skirtingi.

2) atveju turime $p = \pm 1$. Beje, tai visiškai nereiškia, kad abi reikšmės tinka, — šį faktą dar reikia įrodyti. Imame $p = 1$. Tada a galima imti bet kokį (nelygų 0 ir 1), o $b = \frac{1}{1-a}$, $c = \frac{a-1}{a}$. Taigi atveju $p = 1$ sistemą L tenkina trejetai $(a; b; c) = (t; \frac{1}{1-t}; \frac{t-1}{t})$, $t \in \boldsymbol{R}\setminus\{0; 1\}$. Lygiai taip pat atveju $p = -1$ sistemą L tenkina trejetai $(a; b; c) = (t; -\frac{1}{t+1}; -\frac{t+1}{t})$, $t \in \boldsymbol{R}\setminus\{0; -1\}$.

Beje, kai $p = 1$, tai duotąsias lygybes tenkinantieji skaičiai a, b ir c yra skirtingi (jei, pavyzdžiui, $b = c$, tai $p = \pm 1 = b + \frac{1}{c} = b + \frac{1}{b} \Rightarrow b^2 \mp b + 1 = 0$, — prieštara). Vadinasi, p tikrai gali įgyti reikšmes 1 ir -1.

Atsakymas. 1 ir -1.

24. *Pirmas būdas.* Lygtį galima ekvivalenčiai pertvarkyti: $(x^4+1)^2 + (x^2+1)(x^8+1) = 2(x^2+1)(x^4+1)$, $x^{10} + 2x^8 - 2x^6 - x^2 = 0$, $x^2(x^8 + 2x^6 - 2x^4 - 1) = 0$.

Kadangi $y = 1$ yra daugianario $y^4 + 2y^3 - 2y^2 - 1$ šaknis, tai jį lengva išskaidyti: $y^4 - 1 + 2y^2(y-1) = (y-1)(y+1)(y^2+1) + 2y^2(y-1) = (y-1)(y^3+y^2+y+1+2y^2) = (y-1)(y^3+3y^2+y+1)$. Vadinasi, duotoji lygtis ekvivalenti

$$x^2(x^2-1)(x^6+3x^4+x^2+1) = 0.$$

Kadangi trečias daugiklis teigiamas, tai $x = 0$ arba $x^2 - 1 = 0$. Taigi $x = 0$ arba $x = \pm 1$.

Antras būdas. Šiek tiek greičiau prie tikslo veda toks pertvarkymas:

$$\frac{x^4+1}{x^2+1} - 1 + \frac{x^8+1}{x^4+1} - 1 = 0,$$
$$\frac{x^4-x^2}{x^2+1} + \frac{x^8-x^4}{x^4+1} = 0,$$
$$x^2(x^2-1)\left(\frac{1}{x^2+1} + \frac{x^2(x^2+1)}{x^4+1}\right) = 0.$$

Kadangi trečias daugiklis teigiamas, tai $x = 0, \pm 1$.

Trečias būdas. Nesunku pastebėti, kad kai $|x| > 1$, tai $x^8 > x^4 > x^2$, todėl $f(x) = \frac{x^4+1}{x^2+1} + \frac{x^8+1}{x^4+1} > 1 + 1 = 2$. Panašiai, kai $0 < |x| < 1$, tai $f(x) < 2$. Liko ištirti reikšmes $|x| = 0$ ir $|x| = 1$. Matome, kad jos tenkina lygtį.

Atsakymas. $-1; 0; 1$.

25. Žr. 20 uždavinį.

26. Padalykime realiųjų skaičių tiesę į keturis intervalus: $(-\infty; -1]$, $(-1; 0]$, $[0; 1)$, $[1; +\infty)$. Tada bent viename iš tų intervalų bus bent 2 duoti skaičiai (iš tikrųjų, jeigu kiekviename intervale būtų ne daugiau kaip vienas iš duotųjų skaičių, tai iš viso turėtume ne daugiau kaip 4 skaičius — prieštara).

Nagrinėkime tą intervalą, kuriame yra du ar daugiau skaičių. Didžiausią iš jų (ar vieną iš didžiausiųjų, jei tokių keli) pažymėkime x, mažiausiąjį y. Tada $x \geqslant y$, x ir y vieno ženklo, todėl įrodinėjamosios nelygybės L kairė dalis $\frac{x-y}{1+xy} \geqslant 0$ įrodyta.

Nesunku įsitikinti, kad teisinga ir dešinioji nelygybė $\frac{x-y}{1+xy} < 1$.

a) Jei $x, y \in [0; 1)$, tai $x - y \leqslant x$, $1 + xy \geqslant 1$, todėl $\frac{x-y}{1+xy} \leqslant \frac{x}{1} < 1$.

b) Jei $x, y \in [1; +\infty)$, tai $x - y \leqslant x - 1$, $1 + xy \geqslant 1 + x$. Todėl $\frac{x-y}{1+xy} \leqslant \frac{x-1}{x+1} < 1$.

c) Jei $x, y \in (-1; 0]$, tai $x - y \leqslant -y$, $1 + xy \geqslant 1$, todėl $\frac{x-y}{1+xy} \leqslant -\frac{y}{1} < 1$.

d) Jei $x, y \in (-\infty; -1]$, tai $x-y \leqslant -1-y$, $1+xy \geqslant 1-y > 0$, todėl $\frac{x-y}{1+xy} \leqslant \frac{-y-1}{-y+1} < 1$.

Uždavinio teiginys įrodytas.

Sprendžiant šį uždavinį, sunkiausia pajusti, kaip reikia skaidyti tiesę į intervalus. Sakykime, kad vienas iš skaičių yra 0, ir turime dar vieną teigiamą skaičių x. Pasižymėkime $y = 0$. Tada L virsta nelygybe $0 \leqslant x < 1$, ir aišku, kad jei x mažesnis už 1, tai teiginys teisingas. Dabar jau nesunku suvokti, kad jeigu intervale $[0; 1)$ yra du skaičiai, tai teiginys taip pat teisingas.

Dabar panagrinėkime atvejį, kai turime skaičių 1 ir dar vieną didesnį skaičių. Tada pažymėjus $y = 1$, o didesnįjį x, L virsta $0 \leqslant \frac{x-1}{x+1} < 1$ ir yra teisinga. Taip pat dabar aišku, kad viskas gerai, kai du skaičiai priklauso intervalui $[1; +\infty)$.

Lygiai taip pat neigiamąją pustiesę verta skelti į du intervalus tašku -1. Taigi natūraliai gauname reikiamą skaidinį.

27. Žr. 24 uždavinį.

28. Randame bendrąjį sekos narį: $a_n = \frac{n^2}{a_1 a_2 \cdot \ldots \cdot a_{n-1}} = \frac{n^2}{(n-1)^2} = \left(1 + \frac{1}{n-1}\right)^2$. Dabar nesunku apskaičiuoti b_n:

$$\begin{aligned} b_n &= 1 + \left(1 + \frac{1}{2}\right)^2 + \left(1 + \frac{1}{4}\right)^2 + \cdots + \left(1 + \frac{1}{2^n}\right)^2 = \\ &= n + 1 + 2\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \cdots + \frac{1}{2^n}\right) + \left(\frac{1}{4} + \frac{1}{4^2} + \cdots + \frac{1}{4^n}\right) = \\ &= n + 1 + \frac{2\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{2^{n+1}}\right)}{1 - \frac{1}{2}} + \frac{\frac{1}{4} - \frac{1}{4^{n+1}}}{1 - \frac{1}{4}} = \\ &= n + \frac{10}{3} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}. \end{aligned}$$

Randame reikiamą ribą:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = \lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{10}{3n} - \frac{1}{n \cdot 2^{n-1}} - \frac{1}{3n \cdot 4^n}\right) = 1.$$

Atsakymas. a) $b_n = n + \frac{10}{3} - \frac{1}{2^{n-1}} - \frac{1}{3 \cdot 4^n}$; b) $\lim_{n\to\infty} \frac{b_n}{n} = 1$.

29. *Pirmas būdas.* Užrašę nelygybę taip: $-\frac{1}{n^3} < \frac{m}{n} - \sqrt{2} < \frac{1}{n^3}$ ir padauginę iš n turime $n\sqrt{2} - \frac{1}{n^2} < m < n\sqrt{2} + \frac{1}{n^2}$. Kadangi $n\sqrt{2} > \frac{1}{n^2}$, tai galima kelti kvadratu:

$$2n^2 - \frac{2\sqrt{2}}{n} + \frac{1}{n^4} < m^2 < 2n^2 + \frac{2\sqrt{2}}{n} + \frac{1}{n^4}.$$

Nagrinėkime atvejus $n = 1$, $n = 2$ ir $n \geqslant 3$.

Kai $n = 1$, turime nelygybę $3 - 2\sqrt{2} < m^2 < 3 + 2\sqrt{2}$, kurią tenkina tik natūralieji $m = 1$ ir $m = 2$.

Kai $n = 2$, nelygybę $8 - \sqrt{2} + \frac{1}{16} < m^2 < 8 + \sqrt{2} + \frac{1}{16}$, tenkina tik $m = 3$.

Kai $n \geqslant 3$, tai $\frac{2\sqrt{2}}{n} + \frac{1}{n^4} \leqslant \frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{81} < 1$ (nes $\frac{2\sqrt{2}}{3} + \frac{1}{81} < 1 \Leftrightarrow \frac{2\sqrt{2}}{3} < \frac{80}{81} \Leftrightarrow 27\sqrt{2} < 40 \Leftrightarrow 27^2 < 800 \Leftrightarrow 729 < 800$, todėl $2n^2 - 1 < m^2 < 2n^2 + 1$. Bet m^2 natūralusis skaičius, o tarp $2n^2 - 1$ ir $2n^2 + 1$ tėra vienas natūralusis $2n^2$, todėl $m^2 = 2n^2$, $\frac{m^2}{n^2} = 2$, $\frac{m}{n} = \sqrt{2}$. Bet kairėje pusėje gavome racionalųjį skaičių, o dešinėje — iracionalųjį, taigi šiuo atveju sprendinių nėra.

Radome tris sprendinius: (1; 1); (2; 1) ir (3; 2).

Antras būdas. Pradinę nelygybę perrašome taip: $\frac{|m-n\sqrt{2}|}{n} < \frac{1}{n^3} \Leftrightarrow |m - n\sqrt{2}| < \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow \left|\frac{(m+n\sqrt{2})(m-n\sqrt{2})}{m+n\sqrt{2}}\right| < \frac{1}{n^2} \Leftrightarrow n^2|m^2-2n^2| < m+n\sqrt{2}$. Jau minėjome, kad reiškinys m^2-2n^2 negali būti lygus nuliui, todėl $|m^2 - 2n^2| \geqslant 1$. Gauname nelygybę

$$m + n\sqrt{2} > n^2. \tag{1}$$

Bet iš nelygybės $|m - n\sqrt{2}| < \frac{1}{n^2}$ turime $m - n\sqrt{2} < \frac{1}{n^2} \Rightarrow m < n\sqrt{2} + \frac{1}{n^2}$. Iš (1) nelygybės gauname, kad juo labiau $n\sqrt{2} + \frac{1}{n^2} + n\sqrt{2} > n^2 \Leftrightarrow n^3(n - 2\sqrt{2}) < 1$. Kai $n \geqslant 3$, tai ši nelygybė neteisinga: $n^3(n - 2\sqrt{2}) \geqslant 3^3(3 - 2\sqrt{2}) \geqslant 3(27 - 18\sqrt{2}) \geqslant 3(27 - \sqrt{648}) > 3(27 - \sqrt{676}) = 3(27 - 26) = 3$. Vadinasi, užtenka patikrinti $n = 1$ ir $n = 2$.

Kai $n = 1$, pradinė nelygybė virsta

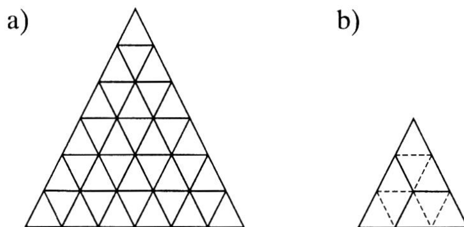
$$|m - \sqrt{2}| < 1 \Leftrightarrow -1 < m - \sqrt{2} < 1 \Leftrightarrow \sqrt{2} - 1 < m < \sqrt{2} + 1 \Leftrightarrow m = 1 \quad \text{arba} \quad m = 2.$$

Kai $n = 2$, tai $|\frac{m}{2} - \sqrt{2}| < \frac{1}{8} \Leftrightarrow 2\sqrt{2} - \frac{1}{4} < m < 2\sqrt{2} + \frac{1}{4} \Leftrightarrow m = 3$.

Radome visus tris sprendinius.

Atsakymas. (1; 1), (2; 1), (3; 2).

30. Lygiakraščio trikampio, kurio kraštinė lygi n, plotas yra $n^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$, o lygiašonės trapecijos, kurios kraštinių ilgiai yra 1, 1, 1 ir 2, plotas lygus $3 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4}$ (tokią trapeciją nesunku padalyti į tris lygiakraščius trikampius, kurių kraštinės lygios 1). Vadinasi, jei lygiakraštį trikampį, kurio kraštinė lygi n, galima padalyti į k reikiamų trapecijų, tai $n^2 \cdot \frac{\sqrt{3}}{4} = \frac{3\sqrt{3}}{4} \cdot k$, $n^2 = 3k$, taigi n dalijasi iš 3. Ir atvirkščiai, jei n dalijasi iš 3, tai tokį lygiakraštį trikampį nesunku padalyti į reikiamas trapecijas. Pirmiausia trikampį padalijame į lygiakraščius trikampius, kurių kraštinės lygios 3 (per taškus, kurie dalija trikampio kraštines į $\frac{n}{3}$ lygių atkarpų, vedame visas tieses, lygiagrečias trikampio kraštinėms) (žr. a) pav). Po to kiekvieną trikampį dalijame į tris trapecijas (žr. b) pav.) (dalijame trikampį į 9 lygiakraščius trikampius, kurių kraštinės lygios 1, o šiuos jungiame į trapecijas).



Atsakymas. Su visais n, kurie dalijasi iš 3.

XXXVI OLIMPIADA (1987 m.)

31. *Pirmas būdas.* Imkime bet kuriuos septynis skaičius. Kadangi jų suma didesnė už 1, tai bent vienas skaičius didesnis už $\frac{1}{7}$. (Iš tikrųjų, jei visi jie būtų ne didesni už $\frac{1}{7}$, tai jų suma būtų ne didesnė už 1, — prieštara.) Atskirkime tą skaičių (ar vieną iš jų, jei didesnių už $\frac{1}{7}$ skaičių yra keli), o likusius 21 skaičių suskirstykime į 3 grupes po 7 skaičius. Kiekvienos grupės skaičių suma didesnė už 1, todėl tų 21 skaičiaus suma didesnė už 3. Prijungiame atskirtąjį skaičių ir gauname sumą didesnę už $3 + \frac{1}{7} = 3{,}142... > \pi = 3{,}141... > 3{,}14$.

Antras būdas. Bet kaip sunumeruokime skaičius. Tada $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 > 1$, $x_2 + x_3 + \cdots + x_8 > 1, \ldots, x_{22} + x_1 + x_2 + \cdots + x_6 > 1$ (iš viso užrašėme 22 nelygybes). Jas sudėję, turime $7(x_1 + x_2 + \cdots + x_{22}) > 22$, $x_1 + x_2 + \cdots + x_{22} > \frac{22}{7} > \pi$.

Trečias būdas. Sunumeruokime skaičius didėjimo tvarka: $x_1 \leqslant x_2 \leqslant \cdots \leqslant x_{22}$. Kadangi $x_1 + x_2 + \cdots + x_7 > 1$, tai $x_7 > \frac{1}{7}$ (jeigu būtų $x_7 \leqslant \frac{1}{7}$, tai ir visi dėmenys būtų ne didesni už $\frac{1}{7}$, o jų suma — ne didesnė už 1). Vadinasi, visi skaičiai nuo x_8 iki x_{22} taip pat didesni už $\frac{1}{7}$, todėl

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_{22} = (x_1 + x_2 + \cdots + x_7) + (x_8 + x_9 + \cdots + x_{22}) >$$
$$> 1 + 15 \cdot x_7 > 1 + \frac{15}{7} = \frac{22}{7}.$$

32. Nuspalvinkime taip pat ir lankus, simetriškus nuspalvintiems (kai kurie iš jų ar jų gabalai jau gali būti nuspalvinti). Aišku, kad po to visų nuspalvintų lankų bendras ilgis yra ne didesnis už 6. Kadangi apskritimo ilgis yra $2\pi \cdot 1 > 6{,}28$, tai dar liko ir nenuspalvintų taškų. Imkime vieną iš jų. Jam simetriškas taip pat nenuspalvintas. Sujungę tuos du taškus, turime skersmenį, kurio abu galai nenuspalvinti.

33. Pirmos lygties sprendinius pažymėkime x_1 ir x_2, antros x_3 ir x_4. Nė vienas sprendinys nelygus nuliui — priešingu atveju bent vienos lygties laisvasis narys būtų lygus nuliui. Sprendinius galima sunumeruoti taip, kad būtų $\frac{x_1}{x_2} = \frac{x_3}{x_4}$. Remiantis Vijeto teorema $x_1 + x_2 = -p$, $x_3 + x_4 = -3p$, todėl

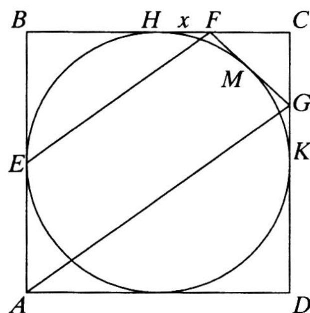
$$\frac{x_1 + x_2}{x_3 + x_4} = \frac{1}{3}, \quad \frac{\left(\frac{x_1}{x_2} + 1\right)x_2}{\left(\frac{x_3}{x_4} + 1\right)x_4} = \frac{1}{3}, \quad \frac{x_2}{x_4} = \frac{1}{3}.$$

Tada santykis

$$\frac{q}{q_1} = \frac{x_1x_2}{x_3x_4} = \frac{x_2^2 \cdot \frac{x_1}{x_2}}{x_4^2 \cdot \frac{x_3}{x_4}} = \frac{x_2^2}{x_4^2} = \left(\frac{x_2}{x_4}\right)^2 = \left(\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{1}{9}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{9}$.

34. Turime $a^k - 1 = (a-1)(a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + a + 1)$. Kadangi pirmas daugiklis pagal sąlygą dalijasi iš k^m, tai užtenka įrodyti, kad antras daugiklis dalijasi iš k. Bet $a^{k-1} + a^{k-2} + \cdots + a + 1 = (a^{k-1} - 1) + (a^{k-2} - 1) + (a^{k-3} - 1) + \cdots + (a-1) + k$. Dešinės pusės visi dėmenys dalijasi iš k. (Iš tikrųjų, visi dėmenys, išskyrus paskutinį, dalijasi iš k^m, o paskutinis dalijasi iš k.)



35. *Pirmas būdas.* Kvadrato kraštinę laikykime lygia 2. Kraštinės BC vidurio tašką pažymėkime H, kraštinės CD vidurio tašką — K, HF pažymėkime x. Tada $FC = 1 - x$. Iš panašiųjų trikampių EBF ir GDA apskaičiuokime GK:

$$BF : BE = DA : DG, \quad (1 + x) : 1 = 2 : (1 + GK),$$

$$1 + GK = \frac{2}{1+x}, \quad GK = \frac{1-x}{1+x}.$$

Pagal Pitagoro teoremą apskaičiuojame FG:

$$FG^2 = (1-x)^2 + (1-GK)^2 = (1-x)^2 + \left(\frac{1-(1-x)}{1+x}\right)^2 = (1-x)^2 + \frac{4x^2}{(1+x)^2} =$$

$$= \frac{(1-x^2)^2 + 4x^2}{(1+x)^2} = \frac{(1+x^2)^2}{(1+x)^2}, \quad FG = \frac{1+x^2}{1+x}.$$

Nesunku įsitikinti, kad $HF + GK = FG$:

$$x + \frac{1-x}{1+x} = \frac{1+x^2}{1+x} \Leftrightarrow x(1+x) + 1 - x = 1 + x^2.$$

Jeigu FG liečia apskritimą (sakysime, taške M), tai lygybė $HF + GK = FG$ išplauktų iš liestinių savybių: $HF + GK = FM + MG = FG$. Bet pasirodo, kad teisingas ir atvirkštinis teiginys, būtent: jei $HF + GK = FG$, tai FG liečia apskritimą. Todėl, juo remiantis, reikiamas teiginys įrodytas.

Liko įrodyti atvirkštinį teiginį. Tarkime priešingai, nors $FG = HF + GK$, bet FG neliečia apskritimo. Tada galimi du atvejai: FG kerta apskritimą arba FG neturi su apskritimu bendrų taškų. Nagrinėkime pirmą atvejį. Veskime apskritimo liestinę $F'G' \parallel FG$ ($F' \in BC, G' \in CD$). Tada $HF' > HF$, $G'K > GK$ ir $F'G' < FG$. Bet $F'G' = HF' + G'K > HF + GK = FG \Rightarrow F'G' > FG$, — prieštara. Lygiai taip pat nagrinėkime antrą atvejį. Tada visos nelygybės pasikeičia priešingomis, ir vėl gauname prieštarą.

Antras būdas. Darykime šiek tiek kitaip. Veskime apskritimo liestinę FMG' (M — apskritimo taškas). Įrodysime, kad $AG' \parallel EF$, o tai reikš, kad G' ir G sutampa.

Turime $HF = x$, $FC = 1 - x$, $CG' = 1 - G'K$, $FG' = x + G'K$. Pagal Pitagoro teoremą

$$(x + G'K)^2 = (1-x)^2 + (1 - G'K)^2 \Leftrightarrow 2xG'K = 2 - 2x - 2G'K \Leftrightarrow G'K = \frac{1-x}{1+x}.$$

Bet tada

$$DG' = 1 + G'K = 1 + \frac{1-x}{1+x} = 2(1+x).$$

Trikampiai EBF ir $G'DA$ panašūs, nes

$$BE : BF = DG' : DA \Leftrightarrow 1 : (1+x) = \frac{2}{1+x} : 2.$$

Todėl $\angle G'AD = \angle EFB \Rightarrow G'AB = \angle FEB \Rightarrow AG' \parallel EF$.

36. Žr. 31 uždavinį.

37. *Pirmas būdas.* Suprastinkime lygties abi puses iš $x!$, gausime

$$y(y-1)\cdot\ldots\cdot(x+2)(x+1)=720.$$

Jei kairėje yra vienas daugiklis, gauname $y=x+1=720$, t. y. $x=719$, $y=720$. Jei kairėje du daugikliai, tai $y(y-1)=720$, o ši lygtis sveikųjų sprendinių neturi: kai $y\geqslant 28$, tai $y(y-1)\geqslant 28\cdot 27=756>720$, o kai $y\leqslant 27$, tai $y(y-1)\leqslant 27\cdot 26=702<720$. Jei kairėje trys daugikliai, tai $y(y-1)(y-2)=720$, ir $y=10$ (kadangi kairė pusė — didėjanti natūraliojo y ($y>3$) funkcija, tai daugiau sprendinių nėra). Tada $x=y-3=7$. Jei kairėje keturi daugikliai, tai $y(y-1)(y-2)(y-3)=720$, ir sprendinių nėra: kai $y\leqslant 6$, tai $y(y-1)(y-2)(y-3)\leqslant 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3=360$, o kai $y\geqslant 7$, tai $y(y-1)(y-2)(y-3)\geqslant 7\cdot 6\cdot 5\cdot 4=840>720$. Jei kairėje penki daugikliai, tai $y(y-1)(y-2)(y-3)(y-4)=720$, ir turime vienintelį sprendinį $y=6$, tada $x=1$. Jei kairėje pusėje šeši daugikliai ar daugiau, tai jų sandauga bus ne mažesnė už $7\cdot 6\cdot 5\cdot 4\cdot 3\cdot 2=7\cdot 720>720$. Turime tris sprendinius: (1; 6), (7; 10), (719; 720).

Antras būdas. Tarkime, kad $(x;y)$ — ieškomas sprendinys. Tada turime lygybę $6!x!=y!$, kurioje x ir y — natūralieji skaičiai. Aišku, kad $y\geqslant 6$ ir $y>x$. Reikšmė $y=6$ tinka, — tada $x=1$. Kita vertus, suprastinę jau turėjome lygybę $y(y-1)\ldots=720$. Matome, kad $y\leqslant 720$, ir uždavinį būtų galima spręsti perrankos metodu. Vis dėlto y rėžiai pernelyg dideli. Jei lygybės kairėje pusėje tik vienas daugiklis y, tai turime sprendinį $y=720$, $x=719$. Jeigu kairėje pusėje du daugikliai ar daugiau, tai $y(y-1)\leqslant 720\Leftrightarrow y\leqslant 27$. Vadinasi, kitų sprendinių užtenka ieškoti, kai y yra intervale [7; 27]. Kad perranka nebūtų nuobodi, elgsimės kiek kitaip. Jei $y\geqslant 7$, tai lygybės $6!x!=y!$ dešinė pusė dalijasi iš 7, todėl ir kairė pusė dalijasi iš 7, taigi $x\geqslant 7$. Bet tada kairė pusė dalijasi iš 5^2, todėl $y\geqslant 10$.

Kai $y=10$, gauname $6!x!=10!\Leftrightarrow x!=7\cdot 8\cdot 9\cdot 10\Leftrightarrow x!=5040\Leftrightarrow x=7$.

Įrodysime, kad kai y yra intervale [11; 27], tai sprendinių nėra. Iš tikrųjų, jei $y\geqslant 11$, tai lygties $6!x!=y!$ kairė pusė dalijasi iš 11, todėl $x\geqslant 11$. Bet tada kairė pusė dalijasi iš 2^{12}, todėl $y\geqslant 16$. Šį samprotavimą trumpai užrašykime taip: $y\geqslant 11\overset{11}{\Longrightarrow}x\geqslant 11\overset{2^4}{\Longrightarrow}y\geqslant 16$. Tęsdami gausime

$$y\geqslant 16\overset{7^2}{\Longrightarrow}x\geqslant 14\overset{3^7}{\Longrightarrow}y\geqslant 18\overset{17}{\Longrightarrow}x\geqslant 17\overset{5^4}{\Longrightarrow}y\geqslant 20\overset{19}{\Longrightarrow}$$
$$x\geqslant 19\overset{3^{10}}{\Longrightarrow}y\geqslant 24\overset{23}{\Longrightarrow}x\geqslant 23\overset{3^{11}}{\Longrightarrow}y\geqslant 27\overset{13^{12}}{\Longrightarrow}x\geqslant 26\overset{2^{22}}{\Longrightarrow}y\geqslant 32.$$

Prieštara.

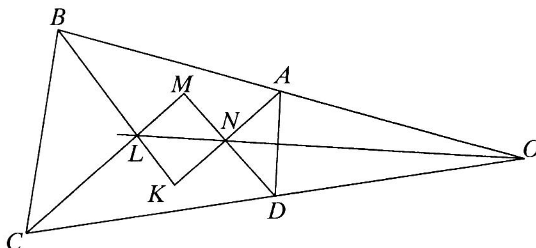
Atsakymas. (1; 6), (7; 10), (719; 720).

38. Visų pirma, pravartu įsitikinti, kad iškilojo keturkampio gretimų kampų pusiaukampinės visada kertasi. Iš tikrųjų, jei AN ir BL yra gretimų kampų A ir B pusiaukampinės, tai $\angle NAB+\angle LBA=\frac{\angle A+\angle B}{2}<\pi$, todėl tikrai spinduliai AN ir BL kertasi.

Jei $ABCD$ — lygiagretainis, tai galimi du atvejai. 1) Kampų B ir D pusiaukampinės lygiagrečios ir yra skirtingose tiesėse. Tada tų dviejų tiesių atkarpos KL ir MN akivaizdžiai neturi bendrų taškų. 2) Įstrižainė BD yra ir kampo B, ir kampo D pusiaukampinė. Tada $\triangle BAD$ lygiašonis, nes $\angle ABD=\angle ADB$ ir $AB=AD$. Bet tada visos lygiagretainio

$ABCD$ kraštinės lygios ir jis yra rombas, o rombo kampų pusiaukampinės sutampa su įstrižainėmis ir kertasi viename taške.

Jei $ABCD$ nėra lygiagretainis, tai, pavyzdžiui, tiesės AB ir CD kertasi, ir viršūnė A yra tarp kirtimosi taško O ir viršūnės B (žr. pav.). Taškai O ir B yra skirtingose pusplokštumėse nuo tiesės AD, bet kraštinė BC yra vienoje pusėje nuo AD (keturkampis $ABCD$ iškilasis!), todėl viršūnė D yra tarp taškų O ir C. Taškai N ir L yra $\angle BOC$ pusiaukampinėje ir galimi 2 atvejai: a) taškas N yra tarp taškų O ir L; b) taškas L yra tarp O ir N (jei taškai N ir L sutampa, tai visos pusiaukampinės kertasi tame taške).



Atveju a) atkarpos AN ir BL dar nesikerta, todėl spindulių AN ir BL kirtimosi taškas K yra kitoje pusplokštumėje nuo tiesės NL negu kraštinė AB. Lygiai taip pat taškas M yra kitoje pusplokštumėje nuo tiesės NL negu kraštinė DC. Taigi atkarpa KL yra vienoje pusplokštumėje nuo tiesės NL, o atkarpa MN kitoje. Tiesėje NL yra tik tų atkarpų galai L ir N, bet tie taškai yra skirtingi. Vadinasi, atkarpos KL ir MN bendrų taškų neturi.

Atveju b) kertasi pačios atkarpos DN ir CL, todėl taškas M yra toje pačioje pusplokštumėje nuo tiesės NL kaip ir kraštinė DC. Lygiai taip pat taškas K yra toje pačioje pusplokštumėje nuo NL kaip ir kraštinė AB. Vadinasi, atkarpos KL ir MN yra skirtingose pusplokštumėse nuo tiesės NL, taigi atkarpos KL ir MN bendrų taškų neturi.

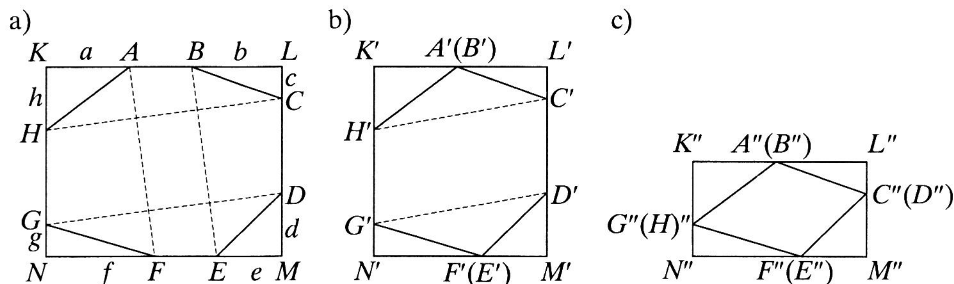
39. *Pirmas būdas.* Išspręskime lygtį. Sandaugą keičiame suma: $8\cos n^\circ \cos(45 - n^\circ) = 4\cos 45^\circ + 4\cos(45^\circ - 2n^\circ) = 2\sqrt{2} + 4\cos(45^\circ - 2n^\circ)$, ir lygtis virsta tokia: $2\sqrt{2} + 4\cos(45^\circ - 2n^\circ) = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, $\cos(2n^\circ - 45^\circ) = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Raskime $x = \arccos\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$. Kadangi $\cos x = \frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4}$, tai $\cos^2 x = \frac{8-2\sqrt{12}}{16} = \frac{2-\sqrt{3}}{4}$, $2\cos^2 x = 1 - \frac{\sqrt{3}}{2}$, $2\cos^2 x - 1 = -\frac{\sqrt{3}}{2}$, $\cos 2x = -\frac{\sqrt{3}}{2}$. Kadangi $0^\circ < x < 90^\circ$, tai $0^\circ < 2x < 180^\circ$, todėl $2x = 150^\circ$, $x = 75^\circ$. Vadinasi, $\arccos\frac{\sqrt{6}-\sqrt{2}}{4} = 75^\circ$, taigi $2n^\circ - 45^\circ = 360^\circ k \pm 75^\circ$, ir $n = 180k + 60$ arba $n = 180k - 15$. Aišku, kad natūraliuosius sprendinius galima užrašyti taip: $n = 180m - 120$, $n = 180m - 15$, $m \in N$.

Antras būdas. Norint įrodyti, kad lygtis turi natūraliųjų sprendinių, užtenka nurodyti vieną sprendinį (kaip jį „atspėti“ — jau kitas klausimas). Įrodysime, kad $n = 60$ yra lygties sprendinys. Tam reikia įrodyti, kad $8\cos 60^\circ \cos 15^\circ = \sqrt{6} + \sqrt{2}$, arba $\cos 15^\circ = \frac{\sqrt{6}+\sqrt{2}}{4}$. Bet $\cos^2 15 = \frac{1+\cos 30^\circ}{2} = \frac{2+\sqrt{3}}{4} = \frac{4+2\sqrt{3}}{8} = \frac{\sqrt{3}+1}{8} = \frac{(\sqrt{6}+\sqrt{2})^2}{16}$, ir įrodinėjamoji lygybė aiški.

Atsakymas. Turi. Pavyzdžiui, $n = 60$.

40. *Pirmas būdas.* Nesunku įsitikinti, kad duotasis aštuonkampis yra iškilasis. (Kiekviena aštuonkampio kraštinė arba yra stačiakampio kraštinėje, arba dalija stačiakampį į dvi dalis, o tada aštuonkampis yra vienoje iš tų dalių. Taigi aštuonkampis yra vienoje

pusplokštumėje nuo bet kurios tiesės, kurioje yra aštuonkampio kraštinė.) Todėl vienoje stačiakampio kraštinėje yra ne daugiau kaip dvi aštuonkampio kraštinės. Kita vertus, stačiakampio kraštinėje negali būti mažiau kaip dvi aštuonkampio viršūnės, nes priešingu atveju aštuonkampis turėtų mažiau kaip 8 viršūnes. Vadinasi, kiekvienoje stačiakampio ($KLMN$ kraštinėje yra lygiai dvi aštuonkampio ($ABCDEFGH$) viršūnės (žr. a) pav.)).



Akivaizdu, kad $AB \parallel FE$ ir $CD \parallel GH$. Įrodysime, kad $AH \parallel DE$ ir $BC \parallel FG$. $ABEF$ — lygiagretainis, nes $AB = EF$ ir $AB \parallel EF$. Išmeskime šį lygiagretainį, o dalį $BLME$ lygiagrečiai pristumkime, kad taškas B sutaptų su A, o E su F (žr. b) pav.). Gavome stačiakampį ir į jį įbrėžtą šešiakampį, kurio visos kraštinės lygios. $C'D'G'H'$ taip pat lygiagretainis. Išmeskime jį, o dalį $D'M'N'G'$ lygiagrečiai pristumkime, kad sutaptų taškai C' ir D' bei G' ir H' (žr. c) pav.). Gavome stačiakampį ir į jį įbrėžtą keturkampį, kurio visos kraštinės lygios. Bet tada šis keturkampis yra rombas ir jo priešais esančios kraštinės lygiagrečios: $B''C'' \parallel F''G''$ ir $A''H'' \parallel D''E''$. Antra vertus, dalis $D'M'N'G'$ ir $BLME$ stūmėme lygiagrečiai, todėl atitinkamos kraštinės ir c) bei b) paveiksluose yra lygiagrečios: $B'C' \parallel F'G'$, $A'H' \parallel D'E'$ bei $BC \parallel FG$, $AH \parallel DE$.

Antras būdas. Vektorių suma (žr. a) pav.):

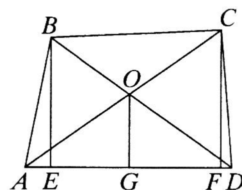
$$\overrightarrow{AB} + \overrightarrow{BC} + \overrightarrow{CD} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{EF} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{GH} + \overrightarrow{HA} = 0. \tag{1}$$

Kita vertus, vektorių $\overrightarrow{AB}$ ir $\overrightarrow{EF}$ suma lygi nuliui, nes tie vektoriai yra priešpriešiai ir vienodo ilgio. Lygiai taip pat $\overrightarrow{CD} + \overrightarrow{GH} = 0$. Todėl iš (1) lygybės gauname

$$\overrightarrow{BC} + \overrightarrow{DE} + \overrightarrow{FG} + \overrightarrow{HA} = 0.$$

Nubraižykime pastaruosius keturis vektorius taip, kad pirmo (antro, trečio) galas sutaptų su antro (atitinkamai trečio arba ketvirto) pradžia. Kadangi visų keturių vektorių suma lygi nuliui, tai ketvirto galas sutaps su pirmo pradžia. Gavome rombą, nes vektoriai yra vienodo ilgio. Taigi vektorius $\overrightarrow{BC}$ yra kolinearus vektoriui $\overrightarrow{FG}$, o vektorius $\overrightarrow{DE}$ — vektoriui $\overrightarrow{HA}$, t. y. $BC \parallel FG$ ir $DE \parallel HA$. Matome, kad šis būdas iš esmės nesiskiria nuo pirmojo.

41. Aišku (žr. pav.), kad $S_{\triangle ABD} : S_{\triangle CBD} = AO : CO$ (trikampių ABD ir CBD aukštinės, nuleistos į bendrą kraštinę BD, sutinka kaip $AO : CO$). Todėl $S_{ABCD} = S_{\triangle ABD} + S_{\triangle CBD} = S_{\triangle ABD} \cdot \frac{AO+CO}{AO} = \frac{AD \cdot BE}{2} \cdot \frac{AC}{AO} = \frac{AD \cdot BE}{2} \cdot \frac{CF}{OG}$ ($AC : AO = CF : OG$, nes $CF \parallel OG$).



42. Atskirai nagrinėkime atvejus $a > 0$ ir $a \leqslant 0$. Kai $a > 0$, tai $x \geqslant 0$, ir duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai

$$(\sqrt{x})^2 - \sqrt{a}\sqrt{x} + 1 = 0. \qquad (1)$$

Pažymėkime $y = \sqrt{x}$, tada

$$y^2 - \sqrt{a}y + 1 = 0. \qquad (2)$$

Kadangi (2) lygtis neturi neigiamų sprendinių (su neigiamais y kairė (2) lygties pusė teigiama), tai ji turi tiek pat sprendinių, kiek ir (1) lygtis, taigi tiek pat, kiek ir duotoji lygtis. (2) lygtis turi vienintelį sprendinį tik kai jos diskriminantas lygus nuliui: $a - 4 = 0$, $a = 4$. Vadinasi, kai $a = 4$, duotoji lygtis turi vienintelį sprendinį.

Kai $a \leqslant 0$, tai $x \leqslant 0$, ir duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai

$$(\sqrt{-x})^2 + \sqrt{-a}\sqrt{-x} - 1 = 0. \qquad (3)$$

Pažymėję $y = \sqrt{-x}$, gauname

$$y^2 + \sqrt{-a}y - 1 = 0. \qquad (4)$$

(4) lygties diskriminantas $4 - a$ teigiamas, todėl ji visada turi du skirtingus sprendinius. Be to, sprendiniai yra skirtingų ženklų, nes, remiantis Vijeto teorema, jų sandauga lygi -1. Taigi su visais $a \leqslant 0$ tik vienas (4) lygties sprendinys yra teigiamas, todėl (3) lygtis turi vienintelį sprendinį. Taigi duotoji lygtis su visais $a \leqslant 0$ turi vienintelį sprendinį.

Atsakymas. $a \in (-\infty; 0] \cup \{4\}$.

43. a) Remiantis kosinusų teorema, $a^2+b^2-c^2 = 2ab\cos C$, todėl $a^2+b^2 = (1+\frac{2}{M})c^2 \Leftrightarrow \frac{a^2+b^2-c^2}{c^2} = \frac{2}{M} \Leftrightarrow M = \frac{2c^2}{a^2+b^2-c^2} \Leftrightarrow M = \frac{c^2}{ab\cos C}$.

Kita vertus, iš sinusų teoremos $a = 2R\sin A$ gauname ($\sin(A+B) = \sin C$, nes $A + B + C = 180°$):

$$M = \frac{\operatorname{ctg} A + \operatorname{ctg} B}{\operatorname{ctg} C} = \left(\frac{\cos A}{\sin A} + \frac{\cos B}{\sin B}\right) : \frac{\cos C}{\sin C} = \frac{(\cos A\sin B + \sin A\cos B)\sin C}{\sin A\sin B\cos C} =$$
$$= \frac{\sin(A+B)\sin C}{\sin A\sin B\cos C} = \frac{\sin^2 C}{\sin A\sin B\cos C} =$$
$$= \frac{(2R\sin C)^2}{(2R\sin A)(2R\sin B)\cos C} = \frac{c^2}{ab\cos C}.$$

b) Kai $M = 2$, tai $a^2 + b^2 = (1 + \frac{2}{2})c^2$ ir $2 = M = \frac{c^2}{ab\cos C} = \frac{a^2+b^2}{2ab\cos C}$. Iš čia, remiantis vidurkių nelygybe, $\cos C = \frac{a^2+b^2}{4ab} \geqslant \frac{2ab}{4ab} = \frac{1}{2}$, taigi $C \leqslant 60°$.

44. Pastebime, kad pirma lygtis virsta teisinga lygybe, jei $x + y = 1$:

$$x^2 + y^2 + \frac{2xy}{x+y} = x^2 + y^2 + 2xy = (x+y)^2 = 1.$$

Pertvarkykime lygtį:

$$(x^2 + y^2)(x + y) + 2xy - (x + y) = 0. \qquad (1)$$

Kairėje pusėje galima iškelti $x+y-1$ (laikykime kad (1) lygtis yra lygtis x atžvilgiu, tada $x=1-y$ yra tos lygties sprendinys, taigi jos kairė pusė dalijasi iš $x-(1-y)=x+y-1$):

$$(x^2+y^2)(x+y)+2xy-(x+y)=(x^2+y^2)(x+y-1)+x^2+y^2+2xy-(x+y)=$$
$$=(x^2+y^2)(x+y-1)+(x+y)(x+y-1)=(x+y-1)(x^2+y^2+x+y).$$

Gavome tokią sistemą (pradinės išvadą):

$$\begin{cases} (x+y-1)(x^2+y^2+x+y)=0, \\ \sqrt{x+y}=x^2-y. \end{cases} \tag{2}$$

Nagrinėkime du atvejus: 1) $x+y-1=0$, 2) $x+y-1\neq 0$.

1) atvejis: $x+y-1=0$. Antra lygtis virsta $x^2-y=1$. Sudėję ją su $x+y=1$, gauname $x^2+x=2$, t. y. $x=1$ (tada $y=0$) arba $x=-2$ (tada $y=3$).

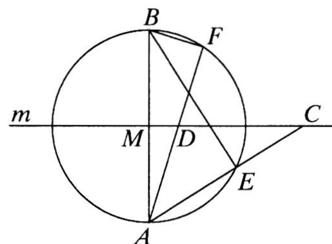
2) atvejis: tada $x^2+y^2+x+y=0$. Iš antros lygties $x+y\geqslant 0$, todėl $x^2+y^2=0$, t. y. $x=y=0$.

Kadangi (1) sistema yra pradinės išvada, tai sprendinius reikia patikrinti. Matome, kad sprendiniai $(1; 0)$ ir $(-2; 3)$ tinka, o sprendinys $(0; 0)$ — ne.

Atsakymas. $(x; y)\in\{(1; 0), (-2; 3)\}$.

45. Kadangi $\left(\frac{n+\sqrt{n^2-4}}{2}\right)^2=\frac{n^2+2n\sqrt{n^2-4}+n^2-4}{4}=\frac{n^2-2+\sqrt{n^4-4n^2}}{2}=\frac{n^2-2+\sqrt{(n^2-2)^2-4}}{2}$, tai užtenka paimti $k=n^2-2$.

46. Sujunkime taškus B ir E, o skersmens AB ir tiesės m kirtimosi tašką žymėkime M. Trikampiai ABE ir ACM panašūs, nes jie turi bendrą smailųjį kampą A, o kampai AEB ir AMC statieji (įbrėžtinis kampas AEB remiasi į skersmenį AB). Todėl $AE : AB = AM : AC$, $AE\cdot AC=AM\cdot AB$. Lygiai taip pat $AF\cdot AD=AM\cdot AB$. Vadinasi, $AE\cdot AC=AF\cdot AD$, $AF=\frac{AE\cdot AC}{AD}=\frac{6\cdot 5}{10}=3$.



Atsakymas. 3.

47. *Pirmas būdas.* Kairę lygybės pusę išskaidome dauginamaisiais: $(x-y)(x-z^2)=1987$. Kadangi 1987 — pirminis skaičius (beje, šiame būde tai nesvarbu), tai vienas iš daugiklių turi būti ± 1, kitas ± 1987. Imkime, pavyzdžiui, $x-z^2=1$, $x-y=1987$. Tada užtenka pasirinkti $z=101$, $x=z^2+1=101^2+1$, $y=x-1987=101^2-1986$. Taigi sąlygai tinka, pavyzdžiui, trejetas $(10\,202; 8215; 101)$.

Antras būdas. Raskime visus uždavinio sąlygą tenkinančius trejetus. Kadangi $1987=1\cdot 1987=(-1)(-1987)=1987\cdot 1=(-1987)(-1)$, ir daugiau skaidinių nėra, tai visus lygybei tinkančius sveikųjų skaičių trejetus gausime iš sistemų

$$\begin{cases} x-y=1, \\ x-z^2=1987, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-1, \\ x-z^2=1987, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=1987, \\ x-z^2=1, \end{cases} \quad \begin{cases} x-y=-1987, \\ x-z=-1. \end{cases}$$

Imkime pirmą sistemą. Iš jos turime $x=z^2+1987$, $y=x-1=z^2+1986$, taigi gauname tokius trejetus, tinkančius lygybei:

$$\{(t^2+1987; t^2+1986; t)\,|\,t\in \boldsymbol{Z}\}.$$

Panašiai iš antros sistemos gauname trejetus

$$\{(t^2 - 1987; t^2 - 1986; t) \mid t \in Z\},$$

iš trečios — trejetus

$$\{(t^2 + 1; t^2 - 1986; t) \mid t \in Z\},$$

iš ketvirtos —

$$\{(t^2 - 1; t^2 + 1986; t) \mid t \in Z\}.$$

Tarp trejetų, įeinančių į visas keturias serijas, nėra sutampančių: jei dviejų trejetų nesutampa trečiosios komponentės, tai trejetai nesutampa; jei trečiosios komponentės vienodos, tai nesutampa pirmosios komponentės. Vadinasi, gavome visus lygybei tinkančius sveikųjų skaičių trejetus. Norint rasti visus uždavinio sąlygai tinkančius trejetus, reikia iš jų išskirti tuos, kurių visos komponentės didesnės už 100. Aišku, kad užtenka imti $t > 100$: tada $t^2 - 1987 > 100^2 - 1987 > 100$, ir sąlyga išpildyta. Taigi gavome tokią trejetų aibę:

$$\{(t^2 + 1987; t^2 + 1986; t), (t^2 - 1987, t^2 - 1986; t), (t^2 + 1; t^2 - 1986; t), (t^2 - 1; t^2 + 1986; t) \mid t \in Z, t > 100\}.$$

Atsakymas. Pavyzdžiui, (10 202; 8215; 101).

48. *Pirmas būdas*. Sistemą spręskime kintamųjų eliminavimo būdu. Iš trečios lygties išreiškę z ir gautą išraišką įstatę į pirmas dvi lygtis, turime sistemą

$$\begin{cases} 4x + y(3 - xy) = 6, \\ 4y + x(3 - xy) = 6, \\ z = \frac{3-xy}{2}. \end{cases} \tag{1}$$

Dabar mėginkime iš pirmos lygties išsireikšti x. Perrašome ją taip:

$$(4 - y^2)x = 3(2 - y). \tag{2}$$

Aišku, kad $y \neq -2$ (priešingu atveju $0 \cdot x = 12$, — prieštara). Kai $y = 2$, tai iš (1) sistemos antros lygties turime $8 + x(3 - 2x) = 3$, $2x^2 - 3x - 2 = 0$, $x = 2$ arba $x = -0{,}5$. Tada iš trečios lygties atitinkamai randame $z = -0{,}5$ ir $z = 2$, ir gauname sistemos sprendinius $(2; 2; -0{,}5)$ ir $(-0{,}5; 2; 2)$.

Kai $y \neq \pm 2$, tai iš (2) lygties galima išsireikšti x:

$$x = \frac{3}{2 + y}. \tag{3}$$

Pertvarkome (1) sistemos antrą lygtį (panašiai kaip ir pirmą lygtį), ir į ją įstatome gautą x išraišką:

$$(4 - x^2)y - 3(2 - x), \quad (2 - x)\big((2 + x)y - 3\big) = 0,$$

$$\Big(2 - \frac{3}{2 + y}\Big)\Big(2 + \frac{3}{2 + y}\Big)y - 3 = 0, \quad (2y + 1)\big((7 + 2y)y - 3(2 + y)\big) = 0,$$

$$(2y + 1)(2y^2 + 4y - 6) = 0, \quad (y + 0{,}5)(y + 3)(y - 1) = 0.$$

Taigi gavome $y = -0{,}5$, arba $y = -3$, arba $y = 1$, atitinkamai iš (3) lygties $x = 2$, $x = -3$, $x = 1$, ir pagaliau iš (1) sistemos trečios lygties $z = 2$, $z = -3$, $z = 1$. Radome dar tris sprendinius $(2; -0{,}5; 2)$, $(-3; -3; -3)$, $(1; 1; 1)$.

Antras būdas. Matėme, kad eliminavimo būdas gremėzdiškas. Paprasčiau sistemą spręsti, atkreipus dėmesį į tai, kad visų lygčių dešinės pusės vienodos. Atėmę iš pirmos lygties antrą, gauname $2(x-y)+z(y-x) = 0$, $(x-y)(2-z) = 0$. Matome, kad užtenka išnagrinėti du atvejus: 1) $x = y$, 2) $z = 2$.

1) atveju $x = y$ pradinė sistema virsta tokia:

$$\begin{cases} 2x + xz = 3, \\ 2z + x^2 = 3. \end{cases}$$

Vėl atėmę šias lygtis vieną iš kitos, gauname $(2-x)(x-z) = 0$. Taigi turime dvi galimybes: 1a) $x = 2$, t. y. $x = y = 2$, ir 1b) $x = z$, t. y. $x = y = z$.

1a) atveju $x = y = 2$ pradinės sistemos lygtys tampa $4 + 2z = 3$, todėl $z = -0{,}5$, ir turime sprendinį $(x; y; z) = (2; 2; -0{,}5)$.

1b) atveju $x = y = z$ sistema virsta lygtimi $2x + x^2 = 3$, $x = 1$ arba $x = -3$, ir gauname sprendinius $(1; 1; 1)$ ir $(-3; -3; -3)$.

2) atveju $z = 2$ iš pradinės gauname sistemą

$$\begin{cases} x + y = \frac{3}{2}, \\ xy = -1, \end{cases}$$

kurios sprendiniai yra $(x; y) = (2; -0{,}5)$ ir $(x; y) = (-0{,}5; 2)$. Jie duoda dar du pradinės sistemos sprendinius $(2; -0{,}5; 2)$ ir $(-0{,}5; 2; 2)$.

Atsakymas. $(1; 1; 1)$, $(-3; -3; -3)$, $(-0{,}5; 2; 2)$, $(2; -0{,}5; 2)$, $(2; 2; -0{,}5)$.

49. *Pirmas būdas.* Aišku, kad $x_1 < 0$, tai visi $x_n < 0$, o kai $x_1 > 0$, tai visi $x_n > 0$.

Nagrinėkime atvejį, kai $x_n > 0$. Kad seka griežtai mažėtų, būtinai turi būti $x_2 < x_1$, t. y. $x_2 - x_1 < 0$, $\frac{7}{x_1} + \frac{x_1}{2} - x_1 < 0$, $\frac{14-x_1^2}{2x_1} < 0$, $x_1^2 > 14$, $x_1 > \sqrt{14}$. Bet to jau užtenka, kad seka griežtai mažėtų. Iš tikrųjų, $x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{7}{x_1} = \frac{x_1^2+14}{2x_1} = \frac{(x_1-\sqrt{14})^2}{2x_1} + \sqrt{14} > \sqrt{14}$, o tada $x_3 - x_2 = \frac{7}{x_2} + \frac{x_2}{2} - x_2 = \frac{14-x_2^2}{2x_2} < 0$. Lygiai taip pat $x_3 > \sqrt{14}$, $x_4 - x_3 < 0$ ir t. t.

Nagrinėkime atvejį, kai $x_n < 0$. Kadangi $x_2 = \frac{x_1}{2} + \frac{7}{x_1} = \frac{x_1^2+14}{2x_1} = \frac{(x_1+\sqrt{14})^2}{2x_1} - \sqrt{14} < -\sqrt{14}$, tai $x_3 - x_2 = \frac{14-x_2^2}{2x_2} \geqslant 0$, ir seka nėra mažėjanti.

Antras būdas. Nagrinėkime atvejį, kai visi $x_n > 0$. Remiantis vidurkių nelygybe $x_{n+1} = \frac{x_n}{2} + \frac{7}{x_n} \geqslant 2\sqrt{\frac{1}{2\cdot 7}}$, $x_{n+1} \geqslant \sqrt{14}$, ir lygybė galima tik kai $\frac{x_n}{2} = \frac{7}{x_n} \Leftrightarrow x_n = \sqrt{14}$. Kadangi $x_2 \geqslant \sqrt{14}$, tai kad seka griežtai mažėtų, turi būti $x_1 > \sqrt{14}$. Tada visi $x_n > \sqrt{14}$, ir $x_{n+1} < x_n$, nes $x_{n+1} - x_n = \frac{x_n}{2} + \frac{7}{x_n} - x_n = \frac{7}{x_n} - \frac{x_n}{2} = \frac{14-x_n^2}{2x_n} < 0$.

Liko atvejis, kai visi $x_n < 0$. Pažymėkime $y_n = -x_n$. Tada $y_{n+1} = \frac{y_n}{2} + \frac{7}{y_n}$, visi $y_n > 0$, ir reikia nustatyti, kada seka (y_n) griežtai didėja. Bet $y_2 = \frac{y_1}{2} + \frac{7}{y_1} \geqslant \sqrt{14}$, todėl $y_3 - y_2 = \frac{14-y_2^2}{2y_2} \leqslant 0$, $y_3 \leqslant y_2$, ir seka nėra griežtai didėjanti.

Atsakymas. $x_1 \in (\sqrt{14}; +\infty)$.

50. Aišku, kad N yra lyginis skaičius, bet nesidalija iš 4. Skaičiai $N-1$ ir $N+1$ yra nelyginiai. Tarkime, kad $N+1$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, t. y. $N+1=(2k+1)^2$, k — natūralusis. Iš čia $N=4k^2+4k$, ir skaičius N dalijasi iš 4. Prieštara.

Dabar tarkime, kad $N-1$ yra natūraliojo skaičiaus kvadratas, t. y. $N-1=k^2$. Tada $N=k^2+1=(k-1)(k+1)+2$. Bet tarp trijų iš eilės einančių skaičių $k-1$, k, $k+1$ vienas (ir tik vienas) dalijasi iš 3, todėl N nesidalija iš 3, o tai prieštarauja sąlygai.

51. Sakykime, kad tas skaičius turi n ženklų. Viena vertus, jis ne mažesnis už 10^{n-1}, o kita vertus, jo skaitmenų kubų suma (taigi ir jis pats) ne didesnė už $9^3\cdot n$ (nes skaitmenų yra n, ir kiekvienas ne didesnis už 9). Vadinasi, turime nelygybę $10^{n-1}\leqslant 9^3 n$. Išspręskime ją. Patikriname, kad tinka $n=1, 2, 3, 4$. Įrodysime, kad $n\geqslant 5$ netinka, t. y. kad $\frac{10^{n-1}}{n}>9^3$, kai $n\geqslant 5$. Tai aišku, nes kai $n=5$, tai $\frac{10^4}{5}=2000>729=9^3$, o seka $\frac{10^{n-1}}{n}$ didėja ($\frac{10^{n-1}}{n}<\frac{10^n}{n+1}$, $n+1<10n$, $9n>1$). Todėl kalbamas skaičius turi ne daugiau kaip 4 skaitmenis. Įsitikinkime, kad skaičius 9999 netenkina sąlygos: $9999\neq 4\cdot 9^3$ (kairėje nelyginis, dešinėje — lyginis skaičius). Taigi kalbamo skaičiaus bent vienas skaitmuo mažesnis už 9, o jo skaitmenų suma ne didesnė už $3\cdot 9^3+8^3=2699$. Vadinasi, įrodėme net daugiau: tas skaičius ne didesnis už 2699.

Pastaba. Nesunku įrodyti, kad ieškomasis skaičius $N<2000$. Jau žymiai sunkiau (perranka) įrodyti, kad sąlygą tenkina tik skaičiai 1, 153, 370, 371, 407.

52. *Pirmas būdas.* Jei $\sin x$ moduliu būtų mažesnis už 1, tai kairė lygties pusė būtų mažesnė už 4. Vadinasi, sprendinių reikia ieškoti tarp x reikšmių, su kuriomis $\sin x=1$ arba $\sin x=-1$. Įstatę į lygtį, įsitikiname, kad tinka tiek reikšmės $x=2k\pi+\frac{\pi}{2}$, tiek ir reikšmės $x=2k\pi-\frac{\pi}{2}$. Jas galima parašyti viena formule $x=n\pi+\frac{\pi}{2}$.

Antras būdas. Sandaugą keičiame suma:

$$\frac{1}{2}\cdot(\cos 4x-\cos 6x)+\frac{3}{2}\cdot(\cos 4x-\cos 10x)=4,$$

$$4\cos 4x-\cos 6x-3\cos 10x=8. \qquad (1)$$

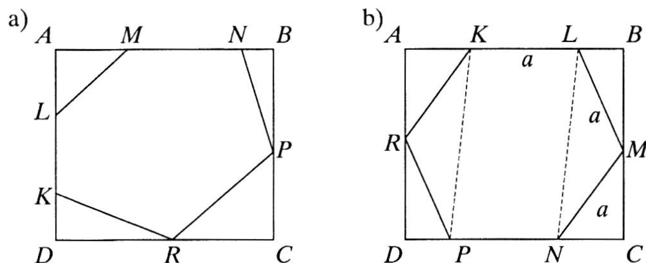
Įrodysime, kad ši lygtis ekvivalenti sistemai

$$\begin{cases}\cos 4x=1,\\ \cos 6x=-1,\\ \cos 10x=-1.\end{cases}$$

Iš sistemos lygybių iš karto gauname, kad teisinga (1) lygybė. Atvirkščiai, jei teisinga (1) lygybė, tai $8=4\cos 4x-\cos 6x-3\cos 10x\leqslant 4-\cos 6x-3\cos 10x\leqslant 4+1-3\cos 10x\leqslant 4+1+3=8$. Kadangi lygūs kraštiniai šių sąsajų nariai, tai lygūs visi jų nariai, ir $\cos 4x=1$, $\cos 6x=-1$, $\cos 10x=-1$. Liko išspręsti šią sistemą. Kadangi π yra visų sistemos trigonometrinių funkcijų periodas, tai užtenka nagrinėti intervalą $[0;\pi)$. Pirmosios lygties sprendiniai yra $x=\frac{n\pi}{2}$, o į mūsų intervalą įeina tik $x=0$ ir $x=\frac{\pi}{2}$. Pirmas sprendinys netenkina antros ir trečios lygties, o antras sprendinys tenkina visas tris lygtis. Pridėję prie šios reikšmės sveikąjį periodų skaičių, randame sistemos sprendinį $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$.

Atsakymas. $x=k\pi+\frac{\pi}{2}$, $k\in \boldsymbol{Z}$.

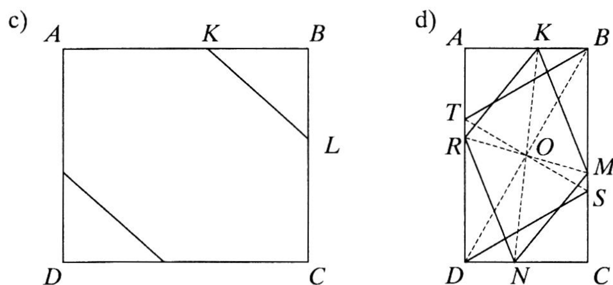
53. (Plg. 40 uždavinį). Visų pirma įsitikinsime, kad duotojo šešiakampio priešais esančios viršūnės yra simetriškos stačiakampio centro atžvilgiu. Tarkime, kad taip nėra. Tada galimi du atvejai: priešais esančios šešiakampio viršūnės K ir N yra arba gretimose stačiakampio kraštinėse (žr. a) pav.), arba priešingose stačiakampio kraštinėse (žr. b) pav.).



Pirmu atveju viršūnė R yra kraštinėje DC, nes $KR = MN < AB = DC$ ir lygiai taip pat $P \in [BC]$. $DR < MB$, nes $DR \leqslant KR = MN \leqslant MB$ ir bent viena nelygybė griežta. Todėl $RC > AM$. Lygiai taip pat $PC > AL$. Bet tada $LM^2 = AL^2 + AM^2 < PC^2 + RC^2 = PR^2$, $LM < PR$, — prieštara.

Antru atveju $AK \neq NC$ (jei $AK = NC$, tai viršūnės K ir N yra simetriškos stačiakampio centro atžvilgiu). Tarkime, pavyzdžiui, kad $AK > NC$. Tada $AR^2 = RK^2 - AK^2 < MN^2 - NC^2 = MC^2$, $AR < MC$. Todėl $DR > BM$, o $DP < LB$. Taigi $AB = AK + KL + LB > NC + PN + DP = DC$, — prieštara.

a) Paveiksle c) pavaizduoto šešiakampio kraštinė lygi 5. Iš tikrųjų, pažymėję $AK = x$, gauname $x^2 = KL^2 = BK^2 + BL^2 = (9 - x)^2 + (8 - x)^2$, $x^2 - 34x + 145 = 0$, $x = 5$.



b) Įrodysime, kad šešiakampio kraštinė mažesnė už 5, kai jokia jo viršūnė nesutampa su stačiakampio viršūne (žr. b) pav.).

Tarkime priešingai, kad šešiakampio kraštinė $a \geqslant 5$. Išmeskime lygiagretainį $KLNP$, o likusias dalis pristumkime vieną prie kitos (žr. d) pav.). Gavome rombą $KMNR$, įbrėžtą į stačiakampį $ABCD$, $AD = 8$, $AB = 9-a \leqslant 4$ (atvejis $AD = 9$, $AB = 8-a$ analogiškas). Per stačiakampio centrą O veskime $TS \perp BD$. Nesunku įsitikinti, kad rombo $BSDT$ kraštinė ilgesnė už rombo $KMNR$ kraštinę, lygią a. Iš tikrųjų, jei, pavyzdžiui, $AK \geqslant KB$, tai kampas BKO bukasis arba statusis, todėl $BO > KO$. Bet $\angle SMO = \angle BKO$, taigi $SO > MO$. Vadinasi, $BS^2 = BO^2 + SO^2 > KO^2 + MO^2 = KM^2$, $BS > KM$ $(= a \geqslant 5)$.

Kita vertus, $CS = BC - BS < 8 - 5 = 3$ ir $DS^2 = SC^2 + DC^2 < 3^2 + 4^2 = 5^2$, $BS = DS < 5$, — prieštara. Prielaida $a \geqslant 5$ neteisinga. Todėl $a < 5$.

Atsakymas. a) Taip, gali.

54. Žr. 48 uždavinį.

55. *Pirmas būdas.* Matome, kad kiekviena operacija poros $(a; b)$ komponenčių skirtumą $b-a$ keičia 3 vienetais. Kadangi pradinės poros (13; 17) komponenčių skirtumas lygus 4, tai po bet kurio žingsnių skaičiaus jis nesidalys iš 3. Todėl nei poros a), nei poros b) gauti negalima — kiekvienos jų skirtumas dalijasi iš 3.

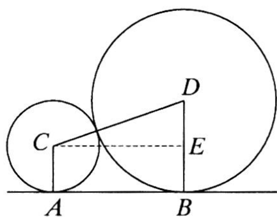
Antras būdas. a) Sakykime, kad x kartų atlikus I operaciją, y kartų — II operaciją, z kartų III operaciją ir t kartų IV operaciją pavyko nuo poros (13; 17) pereiti prie poros (37; 43). Tada lygindami dvejetų pirmąsias ir antrąsias komponentes, gauname

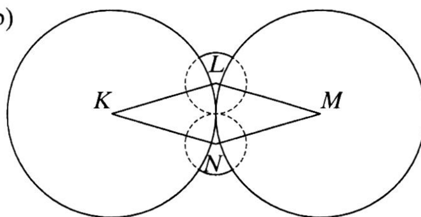
$$13 + x \cdot 2 + y \cdot 1 + z \cdot (-2) + t \cdot (-1) = 37,$$
$$47 + x \cdot (-1) + y \cdot (-2) + z \cdot 1 + t \cdot 2 = 43,$$

arba $2x+y-2z-t = 24$, $x+2y-z-2t = 4$. Sudėję lygtis, gauname $3x+3y-3z-3t = 28$, kairė pusė dalijasi iš 3, dešinė — ne, ir gauname prieštarą. Vadinasi, pereiti prie poros (37; 43) neįmanoma. Lygiai taip pat nagrinėjamas b) atvejis.

Atsakymas. a) Negalima; b) negalima.

56. Raskime atstumą tarp bet kurių dviejų besiliečiančių rutulių centrų projekcijų į jų bendrą liečiamąją išorinę plokštumą. Veskime plokštumą per tų rutulių centrus, statmeną liečiamajai plokštumai. Pjūvyje gausime du apskritimus, kurie liečia vienas kitą ir jų bendrą išorinę liestinę (žr. a) pav.: $AC \perp AB$, $BD \perp AB$, C ir D — rutulių centrai, $CE \parallel AB$). Remiantis Pitagoro teorema $AB^2 = CE^2 = CD^2 - DE^2 = (AC + BD)^2 - (BD-AC)^2 = 4AC \cdot BD$. Vadinasi, atstumas tarp rutulių centrų projekcijų lygus dvigubam rutulių spindulių geometriniam vidurkiui.

a)


b)


Dabar projektuokime visus keturis duotuosius rutulius į duotąją plokštumą, jų centrų projekcijas pažymėkime K, L, M ir N (žr. b) pav.), o ieškomąjį spindulį r. Kadangi $KL^2 = LM^2 = MN^2 = NK^2 = 4Rr$, tai $KLMN$ — rombas. Jo įstrižainės lygios $2R$ ir $2r$. Bet rombo įstrižainės yra statmenos ir dalija viena kitą pusiau. Remiantis Pitagoro teorema $KL^2 = \left(\frac{LN}{2}\right)^2 + \left(\frac{KM}{2}\right)^2$, $4Rr = R^2 + r^2$, $r = (2 \pm \sqrt{3})R$. Abu sprendiniai galimi: kai $r > R$, tai $r = (2+\sqrt{3})R$, o kai $r < R$, tai $r = (2-\sqrt{3})R$.

Atsakymas. $(2 \pm \sqrt{3})R$.

57. Pažymėję trikampio kampus A, B ir C, turime $\operatorname{tg} A + \operatorname{tg} C = 2 \operatorname{tg} B$. Reikia įrodyti, kad $\sin 2A + \sin 2C = 2 \sin 2B$. Pertvarkome pirmąją lygybę, remdamiesi tuo, kad

$A + B + C = 180°$:

$$\frac{\sin(A+C)}{\cos A \cos C} = \frac{2\sin B}{\cos B}, \quad \frac{\sin B}{\cos A \cos C} = \frac{2\sin B}{\cos B},$$

$2\cos A \cos C = \cos B$, $\quad 2\cos A \cos C = -\cos(A+C)$,

$2\cos A \cos C = \sin A \sin C - \cos A \cos C$,

$2(\cos A \cos C - \sin A \sin C) = -(\cos A \cos C + \sin A \sin C)$,

$2\cos(A+C) = -\cos(A-C)$, $\quad 4\cos(A+C)\sin(A+C) = -2\cos(A-C)\sin(A+C)$,

$-2\sin 2(A+C) = \sin 2A + \sin 2C$, $\quad \sin 2A + \sin 2C = 2\sin 2B$.

58. Kadangi $a_2 = 25$, $a_3 = 25^2$, $a_4 = a_3^2$ ir t. t., tai visi sekos nariai, pradedant antruoju, baigiasi skaitmenimis 25. Todėl $a_n + 1$, kai $n \geqslant 2$, baigiasi skaitmenimis 26, ir dalijasi iš 2, bet nesidalija iš 4. Norint sužinoti, kiek skaičių a_{100} ir a_{99} skaitmenų sutampa, reikia nustatyti, keliais nuliais baigiasi jų skirtumas. Bet

$$a_{100} - a_{99} = a_{99}^2 - a_{99} = a_{99}(a_{99} - 1) = a_{99}(a_{98}^2 - 1) = a_{99}(a_{98} + 1)(a_{98} - 1) =$$
$$= \dots = a_{99}(a_{98} + 1)(a_{97} + 1) \cdot \ldots \cdot (a_2 + 1)(a_2 - 1),$$

todėl į skirtumo skaidinį įeina 2^{98} penketai (nes į a_2 įeina 2^1 penketų, į a_3 — 2^2 penketų, į a_4 — 2^3 penketų, ..., į a_{99} — 2^{98} penketai, o kiti daugikliai nesidalija iš 5, nes baigiasi skaitmenimis 4 arba 6) ir 100 dvejetų (į paskutinį daugiklį $a_2 - 1 = 24$ įeina 3 dvejetai). Vadinasi, skirtumas $a_{100} - a_{99}$ dalijasi iš 10^{100}, bet nesidalija iš 10^{101}. Tai ir reiškia, kad sutampa a_{100} ir a_{99} šimtas paskutinių skaitmenų (beje, svarbu, kad a_{99} turi tikrai daugiau kaip šimtą skaitmenų: $a_2 > 10$, $a_3 = a_2^2 > 10^2$, $a_4 > 10^4$, ..., $a_9 > 10^{128}$).

Atsakymas. 100 skaitmenų.

59. *Pirmas būdas.* Spręskime sistemą eliminavimo būdu. Iš ketvirtos lygties $t = \frac{3-xyz}{2}$. Įstatę į trečią lygtį, turime $4z+xy(3-xy) = 6$, $z(4-x^2y^2) = 3(2-xy)$, $z(2+xy)(2-xy) = 3(2-xy)$. Kadangi norime išsireikšti z, tai reikia nagrinėti tris atvejus: a) $xy = -2$, b) $xy = 2$, c) $xy \neq \pm 2$.

a) atveju paskutinė lygtis, taigi ir sistema, sprendinių neturi.

b) atveju $y = \frac{2}{x}$ ($x \neq 0$, nes kitaip iš II–IV lygčių $y = z = t = \frac{3}{2}$, bet šios reikšmės netinka pirmai lygčiai), $t = 1{,}5 - z$, ir pirma lygtis virsta $2x + \frac{2}{x} \cdot z(1{,}5 - z) = 3$, $2x^2 + z(3 - 2z) = 3x$, $2x^2 - 2z^2 = 3(x - z)$, $(x - z)(2x + 2z - 3) = 0$, ir $z = x$ arba $z = 1{,}5 - x$. Kai $z = x$, tai iš antros lygties $\frac{4}{x} + x^2(1{,}5 - x) = 3$, $4 + 1{,}5x^3 - x^4 = 3x$, $(x^4-4)-(1{,}5x^3-3x) = 0$, $(x^2-2)(x^2+2)-1{,}5x(x^2-2) = 0$, $(x^2-2)(x^2-1{,}5x+2) = 0$, $x = \pm\sqrt{2}$, ir gauname $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$, $z = \sqrt{2}$, $t = 1{,}5-\sqrt{2}$ arba $x = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$, $z = -\sqrt{2}$, $t = 1{,}5 + \sqrt{2}$.

Kai $z = 1{,}5 - x$, tai antra lygtis vėl virsta ta pačia lygtimi $\frac{4}{x} + x^2(1{,}5 - x) = 3$, todėl $x = \pm\sqrt{2}$, ir gauname $x = \sqrt{2}$, $y = \sqrt{2}$, $z = 1{,}5 - \sqrt{2}$, $t = \sqrt{2}$ arba $x = -\sqrt{2}$, $y = -\sqrt{2}$, $z = 1{,}5 + \sqrt{2}$, $t = -\sqrt{2}$.

c) atveju $z = \frac{3}{2+xy}$, $t = (3 - \frac{3xy}{2+xy})/2 = \frac{3}{2+xy}$.

Įstatę į pirmą lygtį, gauname

$$2x + y \cdot \frac{9}{(2+xy)^2} = 3, \quad 2x(2+xy)^2 + 9y = 3(2+xy)^2, \quad (3-2x)(2+xy)^2 = 9y,$$

$$(3-2x)(4+4xy+x^2y^2) = 9y, \quad (3-2x)x^2y^2 + 4xy(3-2x) - 9y + 4(3-2x) = 0.$$

Iš šios lygties, kuri yra kvadratinė y atžvilgiu, galima išsireikšti y:

$$D_y = 16x^2(3-2x)^2 - 72x(3-2x) + 81 - 16(3-2x)^2x^2 = 9(9-8x(3-2x)) =$$
$$= 9(9-24x+16x^2) = 9(3-4x)^2,$$
$$y = \frac{-4x(3-2x)+9\pm 3(3-4x)}{2(3-2x)x^2}.$$

Paėmę pliuso ženklą, turime

$$y = \frac{8x^2-24x+18}{2(3-2x)x^2} = \frac{(2x-3)^2}{(3-2x)x^2} = \frac{3-2x}{x^2}.$$

Kai imame minuso ženklą, tai

$$y = \frac{8x^2}{2(3-2x)x^2} = \frac{4}{3-2x}.$$

Pirmu atveju $y = \frac{3-2x}{x^2}$ iš antros lygties turime

$$\frac{2(3-2x)}{x^2} + \frac{9x}{(2+(3-2x)/x)^2} = 3, \quad \frac{6-4x}{x^2} + \frac{9x^3}{(2x+3-2x)^2} = 3,$$
$$6-4x+x^5 = 3x^2, \quad x^5-4x-3(x^2-2) = 0, \quad x(x^4-4)-3(x^2-2) = 0,$$
$$(x^2-2)(x^3+2x-3) = 0,$$
$$(x^2-2)(x^3-1+(2x-2)) = 0, \quad (x^2-2)(x-1)(x^2+x+2) = 0,$$
$$x = \sqrt{2} \text{ arba } x = -\sqrt{2}, \text{ arba } x = 1.$$

Kai $x = \sqrt{2}$, paeiliui randame $y = \frac{3-2x}{x^2} = 1{,}5 - \sqrt{2}$, $z = t = \frac{3}{2+xy} = \sqrt{2}$.

Kai $x = -\sqrt{2}$, tai $y = 1{,}5 + \sqrt{2}$, $z = t = -\sqrt{2}$.

Kai $x = 1$, tai $y = 1$, $z = t = 1$.

Antru atveju $y = \frac{4}{3-2x}$ iš antros lygties turime

$$\frac{8}{3-2x} + \frac{9x}{(2+4x/(3-2x))^2} = 3, \qquad \frac{8}{3-2x} + \frac{x(3-2x)^2}{4} = 3,$$
$$32 + x(3-2x)^3 = 12(3-2x).$$

Išspręsime šią lygtį. Galima būtų perkelti visus narius į vieną pusę ir išskaidyti, iškeliant $x^2-3x-0{,}25$ (iš sistemos simetrijos aišku, kad ši lygtis turi sprendinius $1{,}5\pm\sqrt{2}$, kurias jau turėjome kaip y reikšmes; tada $(x-1{,}5-\sqrt{2})(x-1{,}5+\sqrt{2}) = (x-1{,}5)^2-2 = x^2-3x-0{,}25$). Bet paprasčiau pažymėti $3-2x = u$. Tada $x = 1{,}5-0{,}5u$, ir lygtis virsta

$$32+(1{,}5-0{,}5u)u^3 = 12u, \quad 64+(3-u)u^2 = 24u, \quad u^4-64-3u^2+24u = 0,$$
$$(u^2-8)(u^2+8)-3u(u^2-8) = 0, \quad (u^2-8)(u^2-3u+8) = 0,$$

$u = 2\sqrt{2}$ arba $u = -2\sqrt{2}$, todėl $x = 1{,}5-\sqrt{2}$ arba $x = 1{,}5+\sqrt{2}$. Pirmą reikšmę atitinka $y = \frac{4}{3-2x} = \frac{4}{2\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, $z = t = \frac{3}{2+xy} = \frac{3}{1{,}5\sqrt{2}} = \sqrt{2}$, antrą reikšmę atitinka $y = -\sqrt{2}$, $z = t = -\sqrt{2}$.

Iš viso gavome 9 sprendinius.

Antras būdas. Ypač supaprastėja sprendimas, kai atsižvelgiame į tai, kad sistema simetrinė. Tai reiškia, kad sukeitę sprendinio $(x; y; z; t)$ bet kurias dvi komponentes vėl gausime sprendinį. Šia pastaba toliau ne kartą naudosimės. Pirmą lygtį dauginame iš x, antrą — iš y ir atimame: $2x^2 - 2y^2 = 3x - 3y$, $(x - y)(1{,}5 - x - y) = 0$. Vadinasi, $x - y = 0$ arba $1{,}5 - x - y = 0$. Tai reiškia, kad $y = x$ arba $y = 1{,}5 - x$. Bet analogiškai įrodome, kad z ir t taip pat gali įgyti tik reikšmes x arba $1{,}5 - x$. Turime 4 atvejus: 1) visi trys kintamieji y, z, t įgyja reikšmę x; 2) du kintamieji įgyja reikšmę x, trečias — reikšmę $1{,}5 - x$; 3) vienas kintamasis įgyja reikšmę x, du — reikšmę $1{,}5 - x$; 4) visi trys kintamieji įgyja reikšmę $1{,}5 - x$.

1) atveju $x = y = z = t$. Sistemos lygtys virsta ta pačia lygtimi $2x + x^3 = 3$. Išspręskime ją. Matome, kad $x = 1$ yra lygties sprendinys, todėl skaidome ir iškeliame $x - 1$: $x^3 - 1 = 2 - 2x$, $(x - 1)(x^2 + x + 1) = 2(1 - x)$, $(x - 1)(x^2 + x + 3) = 0$. Kvadratinio trinario diskriminantas neigiamas, todėl $x = 1$. Gavome sprendinį $(1; 1; 1; 1)$.

2) atveju galima laikyti, kad $x = y = z$, $t = 1{,}5 - x$. Gauname sistemą

$$\begin{cases} 2x + x^2(1{,}5 - x) = 3, \\ 2(1{,}5 - x) + x^3 = 3. \end{cases}$$

Galima būtų spręsti vieną kurią lygtį, bet sistemą spręsti paprasčiau: sudėję lygtis, turime $1{,}5x^2 = 3$, t. y. $x^2 = 2$, $x = \pm\sqrt{2}$. (Abu sprendiniai tenkina paskutinę sistemą, nes $x^2 = 2$, todėl $2x + x^2(1{,}5 - x) = 2x + 2(1{,}5 - x) = 3$, $2(1{,}5 - x) + x^3 = 2(1{,}5 - x) + x^2 \cdot x = 2(1{,}5 - x) + 2x = 3$.) Gauname sprendinį $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}; 1{,}5 - \sqrt{2})$ (o iš jo, perstatę komponentes, dar tris sprendinius) ir sprendinį $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 1{,}5 + \sqrt{2})$ (ir dar tris jo „giminaičius“).

3) atveju iš pradžių laikykime, kad $x = y$, $z = t = 1{,}5 - x$. Gauname sistemą $2x + x(1{,}5 - x)^2 = 3$, $2(1{,}5 - x) + x^2(1{,}5 - x) = 3$. Atimame lygtis vieną iš kitos: $2(2x - 1{,}5) + x(1{,}5 - x)(1{,}5 - 2x) = 0$, $(x - 1{,}5)(x^2 - 1{,}5x + 2) = 0$. Ši lygtis turi tik sprendinį $x = 0{,}75$, bet jis netinka sistemai: $1{,}5 + 0{,}75^3 \neq 3$.

4) atvejo galima ir nenagrinėti: užtenka pažymėti $1{,}5 - x = u$, ir turėsime, kad trys kintamieji įgyja reikšmę u, o ketvirtas $1{,}5 - u$. Vadinasi, gausime tuos pačius 2) atvejo sprendinius.

Atsakymas. $(1; 1; 1; 1)$, $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}; 1{,}5 - \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; \sqrt{2}; 1{,}5 - \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(\sqrt{2}; 1{,}5 - \sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(1{,}5 - \sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2}; \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 1{,}5 + \sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; -\sqrt{2}; 1{,}5 + \sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(-\sqrt{2}; 1{,}5 + \sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2})$, $(1{,}5 + \sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.

60. *Pirmas būdas.* Duotą skaičių išreiškime taip: $A = 10a + b$ (b — vienetų skaitmuo). Tada naujasis skaičius lygus $B = 10^{17}b + a$. Nagrinėkime skirtumą $10B - A = 10^{18}b + 10a - 10a - b = (10^{18} - 1)b$. Jis dalijasi iš 7 ($10^{18} - 1 = (10^6 - 1)(10^{12} + 10^6 + 1)$, dalijasi iš $10^6 - 1$, $10^6 - 1 = (10^3 + 1)(10^3 - 1)$, dalijasi iš $10^3 + 1$, $10^3 + 1 = (10 + 1)(10^2 - 10 + 1) = 11 \cdot 91 = 7 \cdot 11 \cdot 13$ dalijasi iš 7). Kadangi skirtumas ir atėminys dalijasi iš 7, tai ir turinys $10B$ dalijasi iš 7, t. y. B dalijasi iš 7.

Antras būdas. Pateiksime sprendimą, prieinamą žemesniųjų klasių moksleiviams. Duotojo skaičiaus A skaitmenis žymėkime $a, b, c, d, \ldots, m, n, p$. Tada $A = \overline{abc...mnp}$, naujasis skaičius $B = \overline{pab...mn}$. Kad šiuos skaičius būtų lengviau palyginti, reikia, kad skaičiaus B skaitmenys pasislinktų per vieną į kairę, t. y. skaičių B reikia padauginti iš 10, tada $10B = \overline{pab...mn0}$.

Matome, kad skaičių $10B$ ir A skirtumas užrašomas labai paprastai: $10B - A = \overline{pab...mn0} - \overline{ab...mnp} = \overline{p00...0} - p = p(100...00 - 1) = p \cdot 999...9$ (18 devynetų). Skaičius 99...9 dalijasi iš 7: dalydami kampu, gauname, kad $999\,999 : 7 = 142\,857$, taigi 18-ženklis skaičius, sudarytas iš devynetų, dalijasi iš 7 (gausime 142 857 142 857 142 857). Kadangi skirtumas $10B - A$ dalijasi iš 7, atėminys A dalijasi iš 7, tai ir turinys $10B$ dalijasi iš 7. Vadinasi, naujasis skaičius B taip pat dalijasi iš 7.

XXXVII OLIMPIADA (1988 m.)

61. *Pirmas būdas.* Reikšmės $x = 0$ ir $x = 1$ nėra lygties sprendiniai. Kai $x \neq 0$ ir $x \neq 1$, kairėje lygties pusėje turime geometrinės progresijos $1, x, x^2, \ldots$ septynių narių sumą, todėl kairė pusė lygi $\frac{x^7-1}{x-1}$. Gavome lygtį $\frac{x^7-1}{x-1} = 0 \Rightarrow x^7 - 1 = 0 \Rightarrow x^7 = 1 \Rightarrow x = 1$. Bet jau žinome, kad pradinei lygčiai ši reikšmė netinka, taigi sprendinių nėra.

Antras būdas. Padauginę abi lygties puses iš $x - 1$, gauname pradinės lygties išvestinę lygtį $x^7 - 1 = 0 \Rightarrow x^7 = 1 \Rightarrow x = 1$. Bet ši reikšmė netinka, taigi sprendinių nėra.

Trečias būdas. Įrodysime, kad $f(x) = x^6 + x^5 + x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 > 0$ su visomis x reikšmėmis (tai ir reikš, kad sprendinių nėra). Kai $x > -1$, tai $f(x)$ parašome taip: $f(x) = x^6 + x^4(x + 1) + x^2(x + 1) + (x + 1)$, ir visi dėmenys neneigiami, o paskutinis teigiamas. Kai $x \leqslant -1$, tai $f(x)$ užrašome taip: $f(x) = x^5(x+1)+x^3(x+1)+x(x+1)+1$, ir vėl visi dėmenys neneigiami, o paskutinis teigiamas.

Beje, galima įrodyti ir tikslesnę nelygybę $f(x) > 0{,}5$.

Atsakymas. Lygtis sprendinių neturi.

62. Remsimės tokiu akivaizdžiu teiginiu: jei skaičius baigiasi ne 0 ir ne 5, tai galima jį padauginti iš tokio skaičiaus B, kad sandauga baigtųsi 2. (Iš tikrųjų, jei skaičius baigiasi 1, tai užtenka padauginti jį iš 2, jei 2 — tai iš 1, 3 — iš 4, 4 — iš 8, 6 — iš 2, 7 — iš 6, 8 — iš 4, 9 — iš 8.)

Jeigu skaičius x baigiasi ne 0 ir ne 5, tai užtenka jį padauginti iš $A = 10B$, ir jo galūnė bus 20. Jeigu skaičiaus x antras skaitmuo 0, o pirmas skaitmuo ne 5 (dviženklio skaičiaus pirmas skaitmuo negali būti 0), tai $\frac{x}{10}$ galima padauginti iš tokio skaičiaus B, kad $\frac{Bx}{10}$ baigtųsi skaitmeniu 2. Tada Bx galūnė bus 20. Jeigu $x = 50$, tai xA gali baigtis tik 00 ir 50, taigi $x = 50$ uždavinio sąlygos netenkina.

Liko išnagrinėti atvejį, kai skaičius x baigiasi 5. Bet tada užtenka imti $A = x$: gausime $Ax = x^2$, ir x^2 baigiasi 25.

Atsakymas. Visi dviženkliai skaičiai, išskyrus 50.

63. *Pirmas būdas.* Skaičius dalijasi iš $9999 = 9 \cdot 11 \cdot 101$, kai jis dalijasi iš 9, iš 11 ir iš 101. Duotasis skaičius $A = 1010...101$ dalijasi iš 9, kai jo skaitmenų suma dalijasi iš 9. Pažymėkime skaičiaus A skaitmenų, lygių 1, skaičių raide N, tada N dalijasi iš 9.

Priminsime dalumo iš 11 požymį: skaičius dalijasi iš 11 tada ir tik tada, kai jo nelyginėse vietose esančių skaitmenų sumos ir lyginėse vietose esančių skaitmenų sumos skirtumas dalijasi iš 11. Kadangi skaičiaus A nelyginėse vietose yra vienetai, o lyginėse — 0, tai N turi dalytis iš 11.

Pagaliau, visiškai aišku, kad jei N lyginis, tai skaičius dalijasi iš 101, o jei nelyginis — tai ne (ir duoda liekaną 1).

Taigi A dalijasi iš 9999 tada ir tik tada, kai jo skaitmenų, lygių 1, skaičius N dalijasi iš $9 \cdot 11 \cdot 2 = 198$, t. y. kai $N = 198k$. Kadangi nulių skaičiaus A užraše yra vienu mažiau, negu vienetų, tai A turi $396k - 1$ skaitmenį (k — natūralusis). Mažiausias toks skaitmenų skaičius yra 395.

Antras būdas. Nebūtina remtis dalumo požymiais. Dalijame „begalinį“ skaičius 1010101... kampu iš 9. Įsitikiname, kad kol vienetų mūsų skaičiuje A yra mažiau negu 9, tai skaičius nesidalija iš 9, o kai 9 vienetai, tai dalijasi. Kadangi liekanos po liekanos 0 pradeda iš naujo kartotis, tai aišku, kad A dalijasi iš 9 tik tada, kai vienetukų skaičius N dalijasi iš 9. Lygiai taip pat dalydami „begalinį“ skaičių kampu iš 11 įsitikiname, kad N dalijasi iš 11. Pagaliau, dalydami iš 101 matome, kad N dalijasi iš 2. Vadinasi, N dalijasi iš $9 \cdot 11 \cdot 2 = 198$, taigi $N = 198k$, o A skaitmenų skaičius yra $396k - 1$.

Atsakymas. Skaitmenų skaičius yra $396k - 1$ ($k \in \mathbf{N}$).

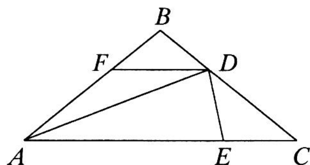
64. *Pirmas būdas.* Atidėkime $AE = AD$ (žr. pav.). Tada $\triangle AED$ lygiašonis su lygiais kampais po 80°. Todėl $\angle DEC = 100^\circ$, $\angle CDE = 40^\circ$ ir $\triangle CDE$ lygiašonis.

Išveskime $DF \parallel AC$. Tada $\angle BDF = 40^\circ$, $\angle BFD = 40^\circ$, $\triangle FBD$ lygiašonis. $\angle AFD = 140^\circ$, $\angle FAD = 20^\circ$, todėl $\angle FDA = 20^\circ$, ir $\triangle AFD$ lygiašonis.

Kadangi $DC = AF$ ($DC = BC - BD = AB - FB = AF$) ir $AF = FD$, tai $DC = FD$.

$\triangle FBD = \triangle CED$ (pagal II požymį), todėl $EC = BD$.

Taigi $AC = AE + EC = AD + DB$. Tai ir reikėjo įrodyti.



Antras būdas. Pasižymėkime $AB = c$. Tada pagal sinusų teoremą $AD = \frac{c \sin 100^\circ}{\sin 60^\circ}$, $BD = \frac{c \sin 20^\circ}{\sin 60^\circ}$, $AC = \frac{c \sin 100^\circ}{\sin 40^\circ}$, ir reikia įrodyti lygybę $\frac{c \sin 100^\circ}{\sin 60^\circ} + \frac{c \sin 20^\circ}{\sin 60^\circ} = \frac{c \sin 100^\circ}{\sin 40^\circ} \Leftrightarrow \sin 100^\circ + \sin 20^\circ = \frac{\sin 80^\circ \sin 60^\circ}{\sin 40^\circ} \Leftrightarrow 2 \sin 60^\circ \cos 40^\circ = \frac{2 \sin 40^\circ \cos 40^\circ \sin 60^\circ}{\sin 40^\circ}$, o tai akivaizdu.

65. Atėmę iš pirmos lygties antrą, gauname $y^2 - z^2 + z - y = 0 \Leftrightarrow (y+z)(y-z) - (y-z) = 0 \Leftrightarrow (y - z)(y + z - 1) = 0$. Vadinasi, reikia išnagrinėti 2 atvejus: 1) $y - z = 0$ ir 2) $y + z - 1 = 0$.

1) atveju $z = y$, ir pradinė sistema virsta tokia: $x^2 + y^2 + y = 1$, $x + 2y^2 = 1$. Atimame iš pirmos lygties antrą: $x^2 - x + y - y^2 = 0$, $(x + y)(x + y - 1) = 0$, t. y. a) $x - y = 0$ arba b) $x + y - 1 = 0$. a) atveju $x = y = z$, ir pradinė sistema virsta $2x^2 + x = 1 \Leftrightarrow 2x^2 + x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = -1$ arba $x = \frac{1}{2}$. Gavome 2 sprendinius $(-1; -1; -1)$ ir $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$.

b) atveju $y = z = 1 - x$, ir pradinė sistema virsta $x^2 + (1 - x)^2 + 1 - x = 1 \Leftrightarrow (1 - x)^2 = x - x^2 \Leftrightarrow (1 - x)^2 = x(1 - x) \Leftrightarrow x = 1$ arba $x = \frac{1}{2}$, ir gauname dar vieną naują sprendinį $(1; 0; 0)$.

2) atveju $z = 1 - y$, ir pradinė sistema virsta

$$\begin{cases} x^2 + y^2 + 1 - y = 1, \\ x + y^2 + (1 - y)^2 = 1 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y^2 - y = 0, \\ x + 2y^2 - 2y = 0 \end{cases} \Rightarrow$$

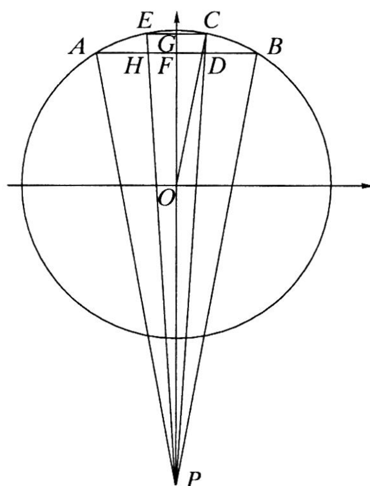
$$x - 2x^2 = 0 \Rightarrow x = 0 \quad \text{arba} \quad x = \frac{1}{2}.$$

Kai $x = 0$, tai $y^2 - y = 0 \Leftrightarrow y = 0$ arba $y = 1$, ir gauname sprendinius $(0; 0; 1)$ ir $(0; 1; 0)$. Kai $x = \frac{1}{2}$, tai $y^2 - y + \frac{1}{4} = 0 \Leftrightarrow \left(y - \frac{1}{2}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow y = \frac{1}{2}$, ir naujų sprendinių nebegauname.

Taigi iš viso gavome 5 sprendinius.

Atsakymas. $(-1; -1; -1)$, $(\frac{1}{2}; \frac{1}{2}; \frac{1}{2})$, $(1; 0; 0)$, $(0; 1; 0)$, $(0; 0; 1)$.

66. Įvedame koordinačių sistemą, kurios pradžia — apskritimo centras O, o y ašis statmena stygai AB (žr. pav.).



Taško C koordinatės $(\cos 80°; \sin 80°)$, taško B — $(\cos 60°; \sin 60°)$. Todėl $GC = \cos 80°$, $FG = \sin 80° - \sin 60°$, $FD = FB - DB = \frac{1}{2} - \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$. Pažymėkime $PF = x$. Iš panašiųjų trikampių PGC ir PFD gauname $\frac{PG}{PF} = \frac{GC}{FD}$, $\frac{x + \sin 80° - \sin 60°}{x} = \frac{\cos 80°}{1/6}$. Atėmę po 1, turime $\frac{\sin 80° - \sin 60°}{x} = 6\cos 80° - 1$, $x = \frac{\sin 80° - \sin 60°}{6\cos 80° - 1}$. Todėl pažymėję $\varphi = \frac{1}{2} \cdot \angle BPA = \angle BPF$, turime $\operatorname{tg}\varphi = \frac{1}{2} : x = \frac{6\cos 80° - 1}{2(\sin 80° - \sin 60°)}$. Iš bėdos galima laikyti, kad kampas φ surastas:

$$\varphi = \operatorname{arctg} \frac{6\cos 80° - 1}{2\sin 80° - \sqrt{3}}.$$

Vis dėlto $\operatorname{tg}\varphi$ išraišką galima suprastinti. Iš pradžių mažiname argumentus:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{6\sin 10° - 1}{2(\cos 10° - \cos 30°)} = \frac{3\sin 10° - \sin 30°}{\cos 10° - \cos 30°}.$$

Čia jau aišku, kad viską galima išreikšti $10°$ argumentu: $\sin 3\alpha = 3\sin\alpha - 4\sin^3\alpha$, $\cos 3\alpha = 4\cos^3\alpha - 3\cos\alpha$, todėl

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{4\sin^3 10°}{4\cos 10° - 4\cos^3 10°} = \frac{\sin^3 10°}{\cos 10°(1 - \cos^2 10°)} = \frac{\sin 10°}{\cos 10°} = \operatorname{tg} 10°.$$

Taigi $\varphi = 10^\circ$, ir ieškomasis kampas $2\varphi = 20^\circ$.

Žinoma, nebūtina taikyti trigubojo kampo formulę:

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{3\sin 10^\circ - \sin 30^\circ}{\cos 10^\circ - \cos 30^\circ} = \frac{\sin 10^\circ - \sin 30^\circ + 2\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ \sin^2 20^\circ} =$$
$$= \frac{-2\sin 10^\circ \cos 20^\circ + 2\sin 10^\circ}{2\sin 10^\circ \sin 20^\circ} = \frac{1-\cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \frac{2\sin^2 10^\circ}{2\sin 10^\circ \cos 10^\circ} = \operatorname{tg} 10^\circ.$$

Atsakymas. 20°.

67. *Pirmas būdas.* Iš reiškinio $a^4 + b^4 + c^4$ atimkime į jį „panašiausią“ besidalijantį iš n reiškinį $(a^2 + b^2 + c^2)^2$:

$$a^4 + b^4 + c^4 - (a^2 + b^2 + c^2)^2 = -2(a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2).$$

Panašiai pertvarkome $a^2 + b^2 + c^2$. Tada skirtumas

$$a^2 + b^2 + c^2 - (a + b + c)^2 = -2(ab + ac + bc)$$

dalijasi iš n. Remdamiesi pastarąja tapatybe, pertvarkome $a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2$:

$$a^2b^2 + a^2c^2 + b^2c^2 = (ab + ac + bc)^2 - 2(a^2bc + ab^2c + abc^2) =$$
$$= (ab + ac + bc)^2 - 2abc(a + b + c).$$

Gauname tapatybę

$$a^4 + b^4 + c^4 = (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(ab + ac + bc)^2 + 4abc(a + b + c).$$

Kadangi jos dešinės pusės kiekvienas dėmuo dalijasi iš n, tai ir kairė pusė $a^4 + b^4 + c^4$ dalijasi iš n. Beje, įrodėme, kad uždavinio teiginys teisingas su visais natūraliaisiais n (o ne tik su nelyginiais).

Antras būdas. Galima eliminuoti c — tada kintamųjų bus tik du, ir pertvarkyti reiškinius žymiai paprasčiau.

Kadangi $a + b + c$ dalijasi iš n, tai $a + b + c = nk$, k — sveikasis skaičius. Tada $c = nk - a - b$.

Pagal sąlygą $a^2 + b^2 + c^2$ dalijasi iš n. Bet $a^2 + b^2 + c^2 = a^2 + b^2 + (nk - a - b)^2 = 2(a^2 + ab + b^2) + n^2k^2 + 2nk(a + b)$, todėl $2(a^2 + ab + b^2)$ dalijasi iš n. Toliau,

$$a^4 + b^4 + c^4 = a^4 + b^4 + (nk - a - b)^4 = a^4 + b^4 + (a + b)^4 + (nk - a - b)^4 - (a + b)^4.$$

Kadangi $(nk - a - b)^4 - (a + b)^4$ dalijasi iš $(nk - a - b) + (a + b) = nk$, tai užtenka įrodyti, kad $a^4 + b^4 + (a + b)^4$ dalijasi iš n, o tai bus aišku, jei pavyks įrodyti, kad $a^4 + b^4 + (a + b)^4$ dalijasi iš $2(a^2 + ab + b^2)$. Iš tikrųjų, išskaidyti nesunku:

$$a^4 + b^4 + (a + b)^4 = 2a^4 + 4a^3b + 6a^2b^2 + 4ab^3 + 2b^4 =$$
$$= 2(a^4 + a^3b + a^2b^2) + 2(a^3b + a^2b^2 + ab^3) + 2(a^2b^2 + ab^3 + b^4) =$$
$$= 2a^2(a^2 + ab + b^2) + 2ab(a^2 + ab + b^2) + 2b^2(a^2 + ab + b^2) =$$
$$= 2(a^2 + ab + b^2)^2.$$

68. Pažymėkime ieškomąjį skaičių $N = \overline{...dcba} = a + 10b + 100c + 1000d + \cdots$. Tada pagal sąlygą gauname lygtį $a + 10b + 100c + 1000d + \cdots = 1 + a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + \cdots$.

Bet $a^2 \leqslant 9a$, $b^2 \leqslant 9b$, $c^2 \leqslant 9c$, ..., todėl

$$a + 10b + 100c + 1000d + \cdots \leqslant 1 + 9a + 9b + 9c + 9d + \cdots,$$
$$b + (100 - 9)c + (1000 - 9)d + \cdots \leqslant 8a + 1,$$
$$(100 - 9)c + (1000 - 9)d + \cdots \leqslant 8 \cdot 9 + 1,$$

ir aišku, kad $c = d = \ldots = 0$.

Vadinasi,

$$a + 10b = 1 + a^2 + b^2, \tag{1}$$

ir kad nereikėtų tirti atskirai vienaženklių skaičių, laikysime, kad gali būti ir $b = 0$. Perrašome (1) lygtį, išskirdami pilnąjį kvadratą kintamojo b atžvilgiu:

$$(b - 5)^2 = 24 - a(a - 1). \tag{2}$$

Kadangi kairė pusė — neneigiamas skaičius, tai $a(a - 1) \leqslant 24$ ir $a \leqslant 5$, o tada dešinė pusė teigiama. Bet $a(a - 1)$ yra lyginis skaičius, todėl kairė pusė dalijasi iš 2, taigi ir iš 4. Vadinasi, $a(a - 1)$ dalijasi iš 4, ir a nelygus nei 2, nei 3. Kita vertus, jei $a(a - 1)$ dalytųsi iš 3, tai kairė (2) lygybės pusė dalytųsi iš 3, todėl ir iš $3^2 = 9$, ir iš $9 \cdot 4 = 36$. Tačiau dešinė (2) lygybės pusė teigiama ir mažesnė už 24, taigi iš 36 nesidalija. Todėl $a(a - 1)$ iš 3 nesidalija, ir lieka vienintelė a reikšmė 5. Tada $(b - 5)^2 = 4$, $b = 5 \pm 2$, ir gauname du sprendinius: $a = 5$, $b = 3$ ir $a = 5$, $b = 7$, t. y. $N = 35$ ir $N = 75$.

Atsakymas. 35 arba 75.

69. Kad koeficientai būtų mažesni, dalijame pirmą lygybę iš 2, o antrą iš 3:

$$3a + b = 2400{,}5,$$
$$2c + d = 865{,}25,$$
$$a + 3b + 2d = 3821.$$

Matome, kad sudėjus pirmą ir trečią lygybes, a ir b koeficientai pasidaro lygūs 4. Kad tokie pat pasidarytų c ir d koeficientai, reikia antrą lygybę padauginti iš 2 ir pridėti prie jau gautos lygybės. Tada

$$4(a + b + c + d) = 7952 \quad \text{ir} \quad a + b + c + d = 1988.$$

Atsakymas. 1988.

70. Kairę lygybės pusę pažymėkime L. Kadangi $a = 2R \sin A$, $b = 2R \sin B$, $c = 2R \sin C$ (čia R — apibrėžtinio apskritimo spindulys), tai $L = 2R \sin A \sin(B - C) + 2R \sin B \sin(C - A) + 2R \sin C \sin(A - B) = R \cos(A - B + C) - R \cos(A + B - C) + R \cos(B - C + A) - R \cos(B + C - A) + R \cos(C - A + B) - R \cos(C + A - B) = 0$.

71. Nagrinėkime sekos narių dalybos iš 2 liekanas. Keturių skaičių sumą dalydami iš 2, gausime tą pačią liekaną, kaip ir tų skaičių liekanų sumą dalydami iš 2. Todėl liekanų seka sudaroma pagal tą pačią taisyklę:

$$1, 1, 0, 1, 1, 1, 1, 0, 1, \ldots$$

Aišku, kad toliau liekanos kartosis. Matome, kad kiekvienas nulis naujojoje sekoje yra tarp dviejų vienetų. Jeigu pradinėje sekoje būtų skaitmenų grupė 1, 9, 9, 8, tai liekanos būtų 1, 1, 0, 0, ir šalia nulio stovėtų nulis.

Atsakymas. Ne, nėra.

72. *Pirmas būdas.* Pabandykime išskaidyti kairę pusę. Tam reikia vieną narį skelti į du. Aišku, kad geriausia mėginti skelti 13: $13 = 1 + 12 = 2 + 11 = 3 + 10 = 4 + 9 = 5+8 = 6+7$. Iš tų sumų „perspektyviomis" atrodo tik $1+12$ ir $4+9$. Pabandykime pirmą galimybę: $2x^3-12x-x+\sqrt{6} = 2x(x^2-6)+(x-\sqrt{6}) = 2x(x-\sqrt{6})(x+\sqrt{6})-(x-\sqrt{6}) = (x-\sqrt{6})(2x^2+2\sqrt{6}x-1)$. Vadinasi, $x-\sqrt{6}=0$ arba $2x^2+2\sqrt{6}x-1=0$. Iš pirmos lygties $x=\sqrt{6}$, iš antros $x = \frac{-\sqrt{6}\pm\sqrt{8}}{2} = \frac{-\sqrt{6}\pm2\sqrt{2}}{2}$.

Antras būdas. Spėjame, kad x gali būti pavidalo $y\sqrt{6}$, taigi keičiame $x = y\sqrt{6}$. Tada lygtis virsta $2y^3\cdot 6\sqrt{6} - 13y\sqrt{6} + \sqrt{6} = 0$, t. y.

$$12y^3 - 13y + 1 = 0. \tag{1}$$

Kairės pusės reiškinį galima išskaidyti grupuojant. Mes pasielgsime kiek kitaip — pamėginsime rasti pastarosios lygties sveikąjį sprendinį y. Kadangi $y \neq 0$, tai lygtį perrašome taip: $12y^2 - 13 + \frac{1}{y} = 0$. Kadangi $12y^2 - 13$ — sveikasis skaičius, tai ir $\frac{1}{y}$ sveikasis. (Lygiai taip pat įrodoma, kad lygties $a_nx^n + a_{n-1}x^{n-1} + \cdots + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$ su sveikaisiais koeficientais a_i, $i = 0, 1, \ldots, n$, laisvasis narys a_0 dalijasi iš bet kurio nenulinio sveikosios lygties sprendinio.) Vadinasi, gali būti tik $y = \pm1$. Įsitikiname, kad $y = -1$ (1) lygčiai netinka, o $y = 1$ — tinka.

Tai reiškia, kad verta kairę pusę skaidyti, iškeliant $y-1$: $12y^3 - 13y + 1 = 12y^3 - 12 - 13(y-1) = 12(y-1)(y^2+y+1) - 13(y-1) = (y-1)(12y^2+12y-1)$. Todėl (1) lygties sprendiniai yra $y = 1$ ir $y = \frac{-6\pm\sqrt{36+12}}{12} = \frac{-3\pm2\sqrt{3}}{6}$, o pradinės (kadangi $x = y\sqrt{6}$) $x = \sqrt{6}$ ir $x = \frac{-3\sqrt{6}\pm6\sqrt{2}}{6} = \frac{-\sqrt{6}\pm2\sqrt{2}}{2}$.

Atsakymas. $\sqrt{6}$, $\frac{2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$, $\frac{-2\sqrt{2}-\sqrt{6}}{2}$.

73. Tarkime, kad d yra duotosios aritmetinės progresijos skirtumas, o n^2 (n — natūralusis skaičius) jos tam tikras narys. Pažiūrėkime, ar kuris nors iš progresijos narių $n^2 + kd$ gali būti lygus sveikojo skaičiaus $n + m$ kvadratui (k ir m — natūralieji skaičiai):

$$(n+m)^2 = n^2 + kd, \quad (2n+m)m = kd.$$

Aišku, kad patogu imti $m = d$, tada $k = 2n+d$. Ir tikrai, progresijos narys $n^2+(2n+d)d = (n+d)^2$ yra taip pat sveikojo skaičiaus kvadratas.

Beje, aišku, kad tokių narių yra be galo daug, pavyzdžiui, $(n+kd)^2 = n^2+(2nk+k^2d)d$, kai k — bet kuris natūralusis skaičius.

74. *Pirmas būdas.* Įsivaizduokime, kad radome būdą mūsų nelygybei įrodyti. Kadangi jis tinka visiems x ir y, tai jis tinka ir kai $x = y$. Vadinasi, mokame įrodyti nelygybę $x + x + \cos(x \cdot x) \geqslant 1$, t. y. nelygybę ($x \geqslant 0$)

$$2x + \cos x^2 \geqslant 1. \tag{1}$$

(1) nelygybė yra pradinės nelygybės atskiras atvejis. Bet pasirodo, kad iš (1) nelygybės išplaukia pradinė nelygybė. Iš tikrųjų, jei (1) teisinga, tai

$$x + y + \cos xy \geqslant 2\sqrt{xy} + \cos(\sqrt{xy})^2 \geqslant 1. \tag{2}$$

Taigi užtenka įrodyti (1) nelygybę. Ją nesunku įrodyti remiantis išvestinėmis. Kai $x \geqslant 1$, tai nelygybė aiški: $2x + \cos x^2 \geqslant 2 + \cos x^2 \geqslant 2 + (-1) = 1$. Įrodysime, kad (1) teisinga intervale $[0; 1)$. Pažymėkime $f(x) = 2x + \cos x^2$. Minėtame intervale $f(x)$ didėja, nes $f'(x) > 0$: $f'(x) = 2 + (-\sin x^2)(x^2)' = 2 - 2x\sin x^2 \geqslant 2 - 2x \cdot 1 = 2(1 - x) > 0$. Kadangi $f(0) = 2 \cdot 0 + \cos 0 = 1$, tai $f(x) \geqslant 1$. (2) nelygybė įrodyta.

Beje, įrodant (2) nelygybę teko ieškoti sudėtinės funkcijos išvestinės. To galima išvengti, pasižymėjus $x^2 = t$ (tada $x = \sqrt{t}$). (2) nelygybė virsta $2\sqrt{t}+\cos t \geqslant 1$ ($t \geqslant 0$), ir funkcijos $g(t) = 2\sqrt{t}+\cos t$ išvestinė $g'(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}-\sin t$ teigiama intervale $(0; 1)$: $g'(t) > \frac{1}{\sqrt{t}}-1 > 0$.

Antras būdas. Kai $x \geqslant 1$ ir $y \geqslant 1$, tai pradinė nelygybė teisinga. Sakykime, kad $0 \leqslant y \leqslant 1$. Laikydami y parametru, nagrinėkime funkciją $f(x) = x + y + \cos xy - 1$. Kai $x = 0$, $f(x) = y \geqslant 0$. Kita vertus, $f'(x) = 1 + y\cos xy \geqslant 0$ (nes $|x\cos xy| \leqslant |y| \leqslant 1$). Todėl $f(x)$ didėja, ir $f(x) \geqslant 0$ su visais $x \geqslant 0$. Vadinasi, (1) nelygybė teisinga, kai $0 \leqslant y \leqslant 1$, o $x \geqslant 0$. Tačiau (1) nelygybė simetriška kintamųjų x ir y atžvilgiu, todėl ji teisinga ir kai $0 \leqslant x \leqslant 1$, $y \geqslant 0$. Taigi (1) nelygybę įrodėme su visais $x \geqslant 0$, $y \geqslant 0$.

75. (Plg. [1], 1086 uždavinį). Kadangi trikampės piramidės visos 4 sienos yra trikampiai, tai visų plokščiųjų kampų suma lygi $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Dabar tarkime, kad prie kiekvienos iš 4 jos viršūnių yra kampas, ne mažesnis už 90°. Kadangi trisienio kampo 2 plokščiųjų kampų suma didesnė už trečiąjį, tai visų trijų plokščiųjų kampų suma didesnė už $2 \cdot 90^\circ = 180^\circ$. Tada visų plokščiųjų kampų suma didesnė už $4 \cdot 180^\circ = 720^\circ$. Prieštara. Vadinasi, prielaida neteisinga, ir mūsų teiginys įrodytas.

76. Tarkime, kad toks daugiakampis yra, ir jis turi n viršūnių. Tada jo kampų suma lygi $(n-2)180^\circ$, o vienas kampas turi $\frac{180(n-2)}{n} = 180 - \frac{360}{n}$ laipsnių. Matome, kad 360 turi dalytis iš n. Kai $n = 360$, tai kampas lygus 179°, ir 179 yra pirminis skaičius. (Įrodysime, kad 179 yra pirminis skaičius. Jei natūralusis skaičius m yra sudėtinis, tai jį galima užrašyti natūraliųjų skaičių sandauga $m = a \cdot b$, $a \geqslant b > 1$. Paėmę bet kurį skaičiaus b pirminį daliklį p, matome, kad skaičius m dalijasi iš pirminio skaičiaus p ir $p \leqslant b \leqslant \sqrt{ab} = \sqrt{m}$. Taigi norint įsitikinti, kad natūralusis skaičius m yra pirminis, užtenka patikrinti, jog jis nesidalija nė iš vieno pirminio skaičiaus, ne didesnio už $\sqrt{m}$. Kadangi 179 nesidalija iš 2, 3, 5, 7, 11 ir 13, tai jis yra pirminis.) Kai $n < 360$, tai natūralusis skaičius $\frac{360}{n}$ dalijasi arba iš 2, arba iš 3, arba iš 5, nes $360 = 2^3 \cdot 3^2 \cdot 5$. Todėl skaičius $180 - \frac{360}{n}$ taip pat dalijasi iš 2, 3 arba 5, taigi nėra pirminis (jis nelygus nei 2, nei 3, nei 5, nes kitaip n nebūtų sveikasis skaičius).

Atsakymas. Yra; 179°.

77. Pažymėkime ieškomuosius skaičius raidėmis m ir n. Tada $m = n^2 - 6$ ir $n = m^2 - 6$. Iš pirmos lygties atėmę antrą, turime $m - n = n^2 - m^2$, $(m - n)(m + n + 1) = 0$, $m = n$ arba $m + n + 1 = 0$. Kai $m = n$, tai $m = m^2 - 6$, t. y. $m = 3$ arba $m = -2$, ir gauname dvi ieškomąsias poras 3 ir 3, -2 ir -2. Kai $m + n + 1 = 0$, tai $m = -n - 1$, ir iš pirmos lygties turime $-n - 1 = n^2 - 6$, $n^2 + n - 5 = 0$, $n = \frac{-1 \pm \sqrt{21}}{2}$. Tada $m = -n - 1 = \frac{-1 \mp \sqrt{21}}{2}$. Gavome dar du sistemos sprendinius. Iš abiejų šitų sistemos sprendinių gauname tuos pačius ieškomuosius skaičius $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ ir $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$. Sprendinius patikriname.

Atsakymas. 3 ir 3; -2 ir -2; $\frac{-1+\sqrt{21}}{2}$ ir $\frac{-1-\sqrt{21}}{2}$.

78. Sužymėkime duotąsias atkarpas pagal ilgį $a_1 \leqslant a_2 \leqslant a_3 \leqslant \dots \leqslant a_{10}$. Jei kurios nors trys atkarpos (iš duotųjų) a, b ir c ($a \leqslant b \leqslant c$) nesudaro trikampio, tai aišku, kad $c \geqslant a + b$. Tačiau $a + b$ yra lyginis skaičius, o c nelyginis, todėl $c > a + b$, ir $c \geqslant 1 + a + b$.

Dabar tarkime, kad jokios trys iš duotųjų atkarpų nesudaro trikampio. Tada

$$
\begin{aligned}
a_3 &\geqslant 1 + a_1 + a_2 \geqslant 1 + 1 + 1 = 3,\\
a_4 &\geqslant 1 + a_2 + a_3 \geqslant 1 + 1 + 3 = 5,\\
a_5 &\geqslant 1 + a_3 + a_4 \geqslant 1 + 3 + 5 = 9,\\
a_6 &\geqslant 1 + a_4 + a_5 \geqslant 1 + 5 + 9 = 15,\\
a_7 &\geqslant 1 + a_5 + a_6 \geqslant 1 + 9 + 15 = 25,\\
a_8 &\geqslant 1 + a_6 + a_7 \geqslant 1 + 15 + 25 = 41,\\
a_9 &\geqslant 1 + a_7 + a_8 \geqslant 1 + 25 + 41 = 67,\\
a_{10} &\geqslant 1 + a_8 + a_9 \geqslant 1 + 41 + 67 = 109.
\end{aligned}
$$

Gavome prieštarą, taigi mūsų prielaida neteisinga. Vadinasi, yra tokios trys duotosios atkarpos, iš kurių galima sudaryti trikampį.

79. *Pirmas būdas.* Pagal išvestinių trupmenų savybę

$$\frac{993}{994} < \frac{993 + 994}{994 + 995} < \frac{994}{995},$$

ir spėjame, kad ieškomoji trupmena yra $\frac{1987}{1989}$. Įrodysime tai. Pertvarkome duotąją nelygybę:

$$n \cdot \frac{993}{994} < m < n \cdot \frac{994}{995}, \tag{1}$$

$$n - \frac{n}{994} \cdot 994 < m < n - \frac{n}{995}. \tag{2}$$

Iš čia išplaukia, kad tarp skaičių $n - \frac{n}{994}$ ir $n - \frac{n}{995}$ turi būti sveikasis skaičius, o tai reiškia, kad tarp $\frac{n}{995}$ ir $\frac{n}{994}$ yra sveikasis skaičius (būtent $n - m$). Visų pirma raskime mažiausią tokį n, kad su tam tikru m būtų teisinga duotoji nelygybė.

Kol $n \leqslant 994$, skaičiai $\frac{n}{995}$ ir $\frac{n}{994}$ priklauso intervalui $(0; 1]$, todėl tarp jų nėra sveiko skaičiaus. Kai $995 \leqslant n \leqslant 1988$, skaičiai $\frac{n}{995}$ ir $\frac{n}{994}$ priklauso intervalui $[1; 2]$, todėl tarp jų taip pat nėra sveiko skaičiaus. Pagaliau, kai $n = 1989$, tarp skaičių $\frac{n}{995}$ ir $\frac{n}{994}$ yra

vienintelis sveikasis skaičius 2, o tada (2), (1) ir duotąją nelygybes tenkina vienintelė m reikšmė $m = n-2 = 1987$. Gavome trupmeną $\frac{1987}{1989}$, o suma $m+n = 1987+1989 = 3976$.

Dabar įrodysime, kad trupmenos $\frac{m}{n}$, tenkinančios duotąją nelygybę, skaitiklio ir vardiklio suma $m+n$ bus didesnė už 3976 , kai $n > 1989$. Iš tikrųjų, kai $1990 \leqslant n \leqslant 3976$, tai skaičiai $\frac{n}{995}$ ir $\frac{n}{994}$ priklauso intervalui [2; 4], todėl jei tarp jų yra sveikasis skaičius, tai jis lygus 3. Tada $m = n-3$, o $m-n \geqslant 1990-3+1990 > 1987+1989 = 3976$. Kai $n > 3976$, tai juo labiau $m+n > 3976$.

Antras būdas. Spręsdami pirmu būdu, ieškojome mažiausios n reikšmės, kai m ir n tenkina duotąją nelygybę. Tačiau daug paprasčiau ieškoti mažiausios $n-m$ reikšmės.

Ekvivalenčiai perrašome duotąją nelygybę:

$$1-\frac{993}{994} > 1-\frac{m}{n} > 1-\frac{994}{995},$$
$$\frac{1}{994} > \frac{n-m}{n} > \frac{1}{995},$$
$$994(n-m) < n < 995(n-m). \tag{3}$$

Aišku, kad $n-m > 0$, nes $\frac{m}{n} < 1$. Tačiau $n-m \neq 1$, nes tarp skaičių 994 ir 995 kitų sveikųjų skaičių nėra. Kai $n-m = 2$, gauname $994\cdot 2 < n < 995\cdot 2$, $n = 2\cdot 994+1 = 1989$, $m = 1987$, o suma $m+n = 2n-2 = 4\cdot 994 = 3976$. Kai $n-m \geqslant 3$, tai remiantis (3) nelygybe

$$m+n = 2n-(n-m) > 2\cdot 994(n-m)-(n-m) =$$
$$= (2\cdot 994-1)(n-m) \geqslant (2\cdot 994-1)\cdot 3 > 4\cdot 994 = 3976.$$

Taigi ieškomieji skaičiai $n = 1989$, $m = 1987$.

Atsakymas. $(m; n) = (1987; 1989)$.

80. *Pirmas būdas.* Pravartu žinoti tokią lygybę:

$$x^4+a^2x^2+a^4 = (x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2). \tag{1}$$

Padauginę abi puses iš $x^2-a^2 = (x+a)(x-a)$, gauname $x^6-a^6 = (x^3+a^3)(x^3-a^3)$, todėl (1) lygybė teisinga, kai $x \neq \pm a$, bet aišku, kad ji teisinga ir su tomis reikšmėmis.

Remiantis (1) lygybe,

$$x^4+a^4+(x+a)^4 = (x^4+a^4+a^2x^2)+(x+a)^4-a^2x^2 =$$
$$= (x^2-ax+a^2)(x^2+ax+a^2)+\big((x+a)^2-ax\big)\big((x+a)^2+ax\big) =$$
$$= (x^2+ax+a^2)(x^2-ax+a^2+x^2+3ax+a^2) = 2(x^2+ax+a^2)^2.$$

Antras būdas. Pademonstruosime, kaip daugianarį $y^2+2y^3+3y^2+2y+1$ galima išskaidyti vadinamuoju neapibrėžtinių koeficientų metodu. Numanome, kad daugianarį gali pavykti išreikšti dviejų kvadratinių trinarių sandauga:

$$y^4+2y^3+3y^2+2y+1 = (Ay^2+By+C)(Dy^2+Ey+F).$$

Kadangi ši lygybė turi būti tapatybė su visais y, tai atskliaudus dešinę pusę, aišku, kad $AD = 1$. Todėl $A \neq 0$, $D \neq 0$, ir dešinę pusę galima užrašyti taip:

$$A\Big(y^2 + \frac{By}{A} + \frac{C}{A}\Big)D\Big(y^2 + \frac{Ey}{D} + \frac{F}{D}\Big) = \Big(y^2 + \frac{By}{A} + \frac{C}{A}\Big)\Big(y^2 + \frac{Ey}{D} + \frac{F}{D}\Big)$$

(nes $AD = 1$). Kitaip sakant, įrodėme, kad jeigu mūsų daugianarį galima išreikšti dviejų kvadratinių trinarių sandauga, tai jį galima išreikšti ir sandauga tokių kvadratinių trinarių, kurių vyriausieji koeficientai lygūs 1. Todėl dažniausiai iš karto taip ir rašoma:

$$y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y + 1 = (y^2 + By + C)(y^2 + Ey + F).$$

Atskliaudę dešinę pusę ir sulyginę koeficientus prie vienodų y laipsnių, gauname sistemą:

$$B + E = 2, \quad C + BE + F = 3, \quad BF + CE = 2, \quad CF = 1.$$

Spręsti šią sistemą būtų nė kiek ne lengviau, negu rasti mūsų daugianario šaknis, bet visa mūsų viltis — kad pavyks atspėti bent vieną sistemos sprendinį.

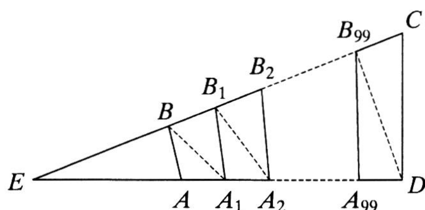
Natūralu pamėginti ieškoti sveikųjų sprendinių. Kadangi $CF = 1$, tai reikia išmėginti galimybę $C = 1$, $F = 1$ (o jei nepavyktų — ir galimybę $C = -1$, $F = -1$). Tada sistema virsta tokia: $B + E = 2$, $BE = 1$. Iš karto matome jos sprendinį $B = 1$, $E = 1$, Vadinasi,

$$y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y + 1 = (y^2 + y + 1)(y^2 + y + 1) = (y^2 + y + 1)^2.$$

Pažymėsime, kad po to, kai skaidinį surandame, į švarraštį galima viso to neberašyti, o pasakyti, pavyzdžiui, taip: lengva patikrinti, kad $y^4 + 2y^3 + 3y^2 + 2y + 1 = (y^2 + y + 1)^2$.

Atsakymas. $2(x^2 + ax + a^2)^2$.

81. *Pirmas būdas.* Padalytosios kraštinės nėra lygiagrečios, nes kitaip visų gautųjų keturkampių plotai būtų lygūs (nes lygūs pagrindai ir aukštinė). Pratęskime tas kraštines iki susikirtimo.



Pažymėkime $AE = a$, $BE = b$, $\frac{AD}{100} = x$, $\frac{BC}{100} = y$. Randame $S_{ABB_1A_1} = S_{A_1B_1E} - S_{ABE} = (A_1E \cdot B_1E - AE \cdot BE)\frac{\sin E}{2} = [(a+x)(b+y) - ab]\frac{\sin E}{2} = (ay + bx + xy)\frac{\sin E}{2}$. Panašiai gauname $S_{A_{99}B_{99}CD} = [(a + 100x)(b + 100y) - (a + 99x)(b + 99y)]\frac{\sin E}{2} = (ay + bx + 199xy)\frac{\sin E}{2}$.

Aišku, kad pastarojo keturkampio plotas didesnis, todėl

$$(ay + bx + xy)\frac{\sin E}{2} = 1, \tag{1}$$

$$(ay + bx + 199xy)\frac{\sin E}{2} = 2. \tag{2}$$

Kita vertus,

$$S_{ABCD} = S_{DCE} - S_{ABC} = \big((a + 100x)(b + 100y) - ab\big)\frac{\sin E}{2} =$$
$$= \big(100(ay + bx) + 10\,000xy\big)\frac{\sin E}{2}.$$

Dabar galima iš (1) ir (2) lygybių (kaip iš sistemos) rasti $(ay+bx)\frac{\sin E}{2}$ ir $xy\frac{\sin E}{2}$ ir įrašyti į gautąją keturkampio $ABCD$ ploto išraišką. Tačiau paprasčiau pastebėti, kad gautoji keturkampio $ABCD$ ploto išraiška lygi (1) ir (2) lygybių kairių pusių sumai, padaugintai iš 50. Taigi $S_{ABCD} = (1 + 2)50 = 150$.

Antras būdas. Įrodysime, kad gautųjų keturkampių plotai sudaro aritmetinę progresiją. Išveskime keturkampių įstrižaines A_1B, A_2B_1, ... (žr. pav.). Iš taškų B, B_1, B_2, ..., B_{99} į tiesę AD nuleistus statmenis pažymėkime h, h_1, h_2, ..., h_{99}. Statmenys h ir h_2 yra trapecijos pagrindai, o h_1 — tos trapecijos vidurio linija, nes ji dalija šoninę kraštinę BB_2 pusiau ir yra lygiagreti pagrindams. Todėl $h_1 = \frac{h+h_2}{2} \Rightarrow h_1 - h = h_2 - h_1$. Bet lygiai taip pat gauname, kad $h_2 - h_1 = h_3 - h_2, \ldots$. Taigi statmenys h, h_1, h_2, ..., h_{99} sudaro aritmetinę progresiją. Vadinasi, ir trikampių ABA_1, $A_1B_1A_2$, $A_2B_2A_3$, ..., $A_{99}B_{99}D$ plotai sudaro aritmetinę progresiją (nes pagrindai AA_1, A_1A_2, ... lygūs, o aukštinės yra h, h_1, h_2, ...). Panašiai įrodome, kad trikampių BB_1A_1, $B_1B_2A_2$, ..., $B_{99}CD$ plotai sudaro aritmetinę progresiją. Kadangi dviejų aritmetinių progresijų suma taip pat yra aritmetinė progresija, tai ir gautųjų keturkampių plotai sudaro aritmetinę progresiją. Keturkampio $ABCD$ plotas lygus tos progresijos sumai (progresija turi 100 narių, o kraštiniai nariai yra 1 ir 2), taigi $S_{ABCD} = 50(1 + 2) = 150$.

Atsakymas. 150.

82. *Pirmas būdas.* Pertvarkę lygtį, gauname

$$x^2 + (2y - 18)x + y^2 - 81 = 0.$$

Iš čia

$$x = 9 - y \pm \sqrt{y^2 - 18y + 81 - y^2 + 81}, \quad x = 9 - y \pm \sqrt{2 \cdot 9(9 - y)}.$$

Kadangi x ir y yra natūralieji skaičiai, tai $2(9 - y)$ yra lyginio skaičiaus kvadratas. Tačiau $9 - y < 9$, todėl $2(9 - y)$ gali įgyti tik reikšmes 2^2 arba 4^2. Kai $2(9 - y) = 4$, tai $y = 7$, $x = 2 \pm 6$, ir gauname sprendinį (8; 7). Kai $2(9 - y) = 16$, tai $y = 1$, $x = 8 \pm 12$, ir gauname sprendinį (20; 1).

Antras būdas. Ekvivalenčiai pertvarkome lygtį, išskirdami pilnąjį kvadratą y atžvilgiu: $(x + y)^2 = (x + 9)^2 - x^2$,

$$(x + y)^2 = 9(2x + 9). \tag{1}$$

Matome, kad $2x + 9$ turi būti nelyginio skaičiaus kvadratas. Aišku, kad x negali būti „didelis“ — tada kairė pusė bus didesnė už dešinę. Įvertinti x nesunku. Turime $x^2 < 9(2x + 9)$, $x(x - 18) < 81$, ir aišku, kad $x < 22$. Vadinasi, $11 \leqslant 2x + 9 \leqslant 53$, todėl $2x + 9 = 5^2$ arba $2x + 9 = 7^2$. Pirmu atveju $x = 8$, ir iš (1) lygties $y = 7$, antru atveju $x = 20$, tada $y = 1$.

Atsakymas. (8; 7), (20; 1).

83. Kadangi $x \leqslant \frac{1+x^2}{2} \Leftrightarrow 2x \leqslant 1 + x^2 \Leftrightarrow (x-1)^2 \geqslant 0$, tai $(a+b)(1+ab) = (1+b^2)a + (1+a^2)b \leqslant \frac{(1+b^2)(1+a^2)}{2} + \frac{(1+a^2)(1+b^2)}{2} = (1+a^2)(1+b^2)$.

84. *Pirmas būdas.* Kai $n = 1$, tai sveikoji dalis $[10(\sqrt{3}-1)] = [\sqrt{300}-10] = 7$, nes $17 < \sqrt{300} < 18 \Leftrightarrow 17^2 < 300 < 18^2 \Leftrightarrow 289 < 300 < 324$.

Kai $n = 2$, tai $[10(\sqrt{7}-2)] = [\sqrt{700}-20] = 6$, nes $26 < \sqrt{700} < 27 \Leftrightarrow 676 < 700 < 729$.

Kai $n = 3$, tai $[10(\sqrt{13}-3)] = [\sqrt{1300}-30] = 6$, nes $36 < \sqrt{1300} < 37 \Leftrightarrow 1296 < 1300 < 1369$.

Kai $n = 4$, tai $[10(\sqrt{21}-4)] = [\sqrt{2100}-40] = 5$, nes $45 < \sqrt{2100} < 46 \Leftrightarrow 2025 < 2100 < 2116$.

Dabar jau aišku, kad $[10(\sqrt{n^2+n+1}-n)] = 5$, kai $n \geqslant 4$, nes

$$10n + 5 < \sqrt{(n^2+n+1)100} < 10n + 6 \Leftrightarrow$$
$$n(n+1)\cdot 100 + 25 < n(n+1)\cdot 100 + 100 < n(n+1)\cdot 100 + 20n + 36 \Leftrightarrow$$
$$25 < 100 < 20n + 36.$$

Antras būdas. Pertvarkykime duotąjį skaičių, daugindami (ir dalydami) iš jungtinio reiškinio: $L = 10(\sqrt{n^2+n+1}-n) = \frac{10(n^2+n+1-n^2)}{\sqrt{n^2+n+1}+n} = \frac{10(n+1)}{\sqrt{n^2+n+1}+n}$.

Bet $n^2+n+\frac{1}{4} < n^2+n+1 < n^2+2n+1$, todėl $n+\frac{1}{2}+n < \sqrt{n^2+n+1}+n < n+1+n$, ir

$$\frac{10(n+1)}{2n+1} < L < \frac{10(n+1)}{2n+0{,}5}, \qquad 5 + \frac{5}{2n+1} < L < 5 + \frac{15}{4n+1}.$$

Kai $\frac{15}{4n+1} < 1$, t. y. kai $n \geqslant 4$, tai aišku, kad skaičiaus L sveikoji dalis lygi 5. Kai $n = 1$, 2, 3, tai skaičiuojame kaip pirmame būde.

Atsakymas. Kai $n = 1$, tai sveikoji dalis lygi 7; kai $n = 2$ arba $n = 3$, tai 6; kai $n \geqslant 4$, tai 5.

85. *Pirmas būdas.* Pažymėkime ieškomąjį skaičių $\overline{edcba}$. Tada $\overline{edcba}^2 = \overline{...edcba}$. Kadangi skaičiaus a^2 vienetų skaitmuo yra a, tai aišku, kad a gali įgyti tik reikšmes 0, 1, 5, 6. Jei $a = 0$, tai ieškomojo skaičiaus kvadratas baigiasi dviem nuliais, todėl $b = 0$. Bet tada ieškomojo skaičiaus kvadratas baigiasi keturiais nuliais, taigi ir $d = c = 0$. Lygiai taip įrodome, kad $e = 0$, ir gauname prieštarą, nes penkiaženklio skaičiaus pirmas skaitmuo negali būti nulis. Taigi $a \neq 0$.

Sakykime, kad $a = 1$. Skaičius b turi tenkinti lygybę $\overline{b1}^2 = \overline{...b1}$. Dauginkime $\overline{b1}$ iš $\overline{b1}$ ir susitarkime rašyti tik vienetų ir dešimčių skaitmenis:

$$\begin{array}{r} \times\, b1 \\ b1 \\ \hline b1 \\ +\, b \\ \hline b1 \end{array}$$

Matome, kad $b = 0$.

Dabar (rašome tik tris nuo galo skaitmenis)

$$\begin{array}{r} \times\ \overline{c01} \\ c01 \\ \hline +\ c01 \\ c \\ \hline c01 \end{array}$$

ir $c = 0$. Lygiai taip pat nustatome, kad $d = 0$ ir $e = 0$. Taigi $a \neq 1$.

Imkime $a = 5$. Tada

$$\begin{array}{r} \times\ b5 \\ b5 \\ \hline \boxed{2}5 \\ \boxed{0} \\ \hline b5 \end{array}$$

Čia prie skaitmenų, esančių kvadratėliuose, reikia pridėti po skaičiaus $5b$ vienetų skaitmenį. Bet galutinėje sumoje $5b$ įeis du kartus, taigi prie dešimčių skaitmens reikės pridėti $10b$ vienetų skaitmenį, t. y. nulį. Taigi sumos dešimčių skaitmuo lygus 2, todėl $b = 2$.

Panašiai

$$\begin{array}{r} \times\ c25 \\ c25 \\ \hline \boxed{1}25 \\ +\ 50 \\ \boxed{0} \\ \hline c25 \end{array}$$

Čia prie šimtų skaitmens reikės du kartus pridėti skaičiaus $5c$ vienetų skaitmenį, t. y. vėl nulį. Taigi $c = 6$. Lygiai taip įrodome, kad skaičiaus $\overline{d625}^2$ tūkstančių skaitmuo lygus skaičiaus $625^2 = ...0625$ tūkstančių skaitmeniui, todėl $d = 0$. Pagaliau e lygus skaičiaus $0625^2 = ...90625$ penktam nuo galo skaitmeniui, vadinasi, $e = 9$. Ieškomasis skaičius lygus 90 625.

Liko išnagrinėti atvejį $a = 6$. Tada

$$\begin{array}{r} \times\ b6 \\ b6 \\ \hline +\ \boxed{3}6 \\ \boxed{0} \\ \hline b6 \end{array}$$

Dabar prie skaitmenų, esančių kvadratėliuose, reikia pridėti po skaičiaus $6b$ vienetų skaitmenį. Todėl sudėję dešimčių skaitmenis gauname $3 + 6b + 6b = \overline{...b}$, $3 + 12b = \overline{...b}$, $3 + 2b = \overline{...b}$, $3 + b = \overline{...0}$, $b = 7$.

Panašiai

$$\begin{array}{r} \times\, c76 \\ c76 \\ \hline \boxed{4}56 \\ +\,32 \\ \boxed{0} \\ \hline c76 \end{array}$$

Tada $7 + 2c = \overline{...c}$, $c = 3$. Daugindami $\overline{d376}$ iš $\overline{d376}$, įsitikiname, kad $1 + 2d = \overline{...d}$, $d = 9$ (1 yra skaičiaus 376^2 tūkstančių skaitmuo). Pagaliau, skaičius 9376^2 dešimčių tūkstančių skaitmuo yra nulis, todėl gausime lygybę $0 + 2e = \overline{...e}$, $e = 0$. Vadinasi, kai $a = 6$, tai sprendinių nėra.

Sprendimą galima užrašyti kiek kitaip. Tarkime, kad jau nustatėme, jog $\overline{ba} = 76$, ir ieškome skaitmens c. Tada $\overline{c76}^2 = (100c)^2 + 2\cdot 76(100c) + 76^2 = 1000N + 100\cdot 2c + 776 = \overline{...c76}$, čia N — natūralusis skaičius. Gauname $2c + 7 = \overline{...c}$, $c + 7$ dalijasi iš 10, $c = 3$.

Antras būdas. Ieškomąjį skaičių pažymėkime raide A. Tada skaičiaus $A^2 - A = A(A-1)$ paskutiniai penki skaitmenys yra nuliai, todėl jis dalijasi iš $100\,000 = 2^5 \cdot 5^5 = 32 \cdot 3125$. Tačiau tik vienas iš skaičių A ir $A - 1$ yra lyginis, todėl vienas jų dalijasi iš $2^5 = 32$. Panašiai tik vienas iš skaičių A ir $A - 1$ dalijasi iš 5, todėl vienas jų dalijasi iš $5^5 = 3125$. Kita vertus, jei natūralusis skaičius dalytųsi ir iš 32, ir iš 3125, tai jis dalytųsi iš $32 \cdot 3125 = 100\,000$ ir turėtų daugiau kaip penkis skaitmenis.

Taigi vienas iš skaičių A ir $A - 1$ dalijasi iš 32, o kitas iš 3125. Dabar nesunku perrinkti visus nelyginius penkiaženklius skaičius, kurie dalijasi iš 3125 (jų yra 14) ir patikrinti, ar jie, padidinti arba sumažinti vienetu, dalijasi iš 32. Surašykime į pirmą eilutę skaičius $2k + 1$, $k = 0, 1, 3, \ldots, 31$, o į antrą skaičių $3125(2k + 1)$ dalybos iš 32 liekanas:

1	3	5	7	9	11	13	15	17	19	21	23	25	27	29	31
21	31	9	19	29	7	17	27	5	15	25	3	13	23	1	11

Paaiškinsime, kaip užpildėme lentelę. Kadangi $3125 = 21$ (čia ir toliau lygybės ženklas reiškia, kad dešinės ir kairės pusių dalybos iš 32 liekana ta pati), $3125 \cdot 2 = 21 \cdot 2 = 10$, tai $3125 \cdot 3 = 3125 + 3125 \cdot 2 = 21 + 10 = 31$, $3125 \cdot 5 = 3125 \cdot 3 + 3125 \cdot 2 = 31 + 10 = 9$, ir t. t. Taigi prie gautos liekanos pridėję 10 (ir, kai reikia, atėmę 32), gauname tolesnę liekaną.

Matome, kad tik skaičiai $3 \cdot 3125 + 1$ ir $29 \cdot 3125 - 1$ dalijasi iš 32. Tačiau pirmas skaičius keturženklis. Taigi gauname vienintelį ieškomąjį skaičių $29 \cdot 3125 = 90\,625$.

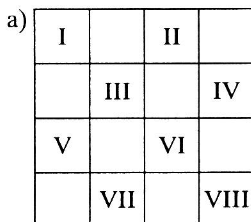
Atsakymas. 90 625.

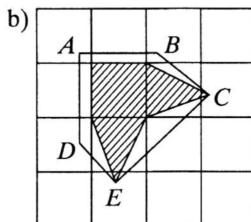
86. Natūralu nelygybėje sumažinti sekos narių skaičių. Kadangi $a_n + a_{n+2} \geqslant 2a_{n+1}$ ir $a_{n+2} + a_{n+4} \geqslant 2a_{n+3}$, tai kairė nelygybės pusė $\frac{a_n + a_{n+2} + a_{n+4}}{3} = \frac{a_n + a_{n+2} - a_{n+2} + a_{n+2} + a_{n+4}}{3} \geqslant \frac{2a_{n+1} - a_{n+2} + 2a_{n+3}}{3}$. Taigi užtenka įrodyti nelygybę

$$\frac{2a_{n+1} - a_{n+2} + 2a_{n+3}}{3} \geqslant \frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{2} \Leftrightarrow \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)(a_{n+1} + a_{n+3}) \geqslant \frac{a_{n+2}}{3} \Leftrightarrow$$
$$\frac{a_{n+1} + a_{n+3}}{2} \geqslant a_{n+2}.$$

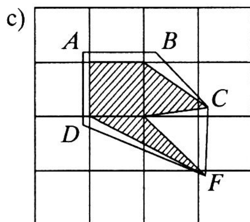
Pastaroji lygybė išplaukia iš sąlygos.

87. Jeigu lapas turėtų bendrų taškų su penkiomis horizontalėmis (horizontale ir vertikale šachmatuose vadinama atitinkama laukelių juosta), tai atstumas tarp dviejų tam tikrų lapo taškų būtų ne mažesnis už 3. Tačiau didžiausias atstumas tarp dviejų lapo taškų lygus lapo įstrižainei $\sqrt{1+2^2} = \sqrt{5} < 3$. Taigi lapas gali turėti bendrų taškų ne daugiau kaip su keturiomis horizontalėmis (ir ne daugiau kaip su keturiomis vertikalėmis). Vadinasi, visas lapas telpa kvadrate, sudarytame iš 16 laukelių. Sužymėkime to kvadrato juodus laukelius (žr. a) pav.). Sakysime, kad lapas ir laukelis kertasi, jei jie turi bendrų vidinių taškų.





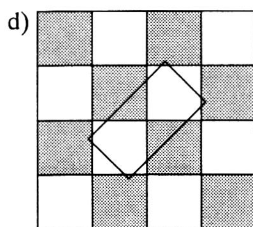
Įrodysime, kad lapas nesikerta bent su dviem juodais laukeliais iš aštuonių. Tarkime priešingai, kad lapas kertasi ne mažiau kaip su septyniais juodais laukeliais. Jei lapas kertasi su visais juodais laukeliais, išskyrus galbūt VIII (arba VI) laukelį, tai jis dengia penkiakampį $ABCED$ (žr. b) pav.), čia A, B, C, D, E — atitinkamai bendri lapo ir I, II, IV, V, VII laukelių vidiniai taškai. Bet tada lapas dengia III laukelį (kurio plotas lygus 1) ir du trikampius, kurių pagrindai yra atitinkamos III laukelio kraštinės, o viršūnės — taškai C ir E (ir kurių kiekvieno plotas didesnis už $\frac{1}{2} \cdot 1 \cdot 1$). Taigi lapo plotas didesnis už 2, ir gavome prieštarą. Jeigu lapas nesikirstų tik su VII laukeliu, tai jis dengtų penkiakampį $ABCFD$ (žr. c) pav.), ir jo plotas vėl būtų didesnis už 2. Kiti atvejai analogiški, taigi lapas negali kirstis su septyniais juodais laukeliais.

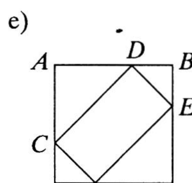


Galima ir kitaip įrodyti, kad lapas kertasi ne daugiau kaip su šešiais juodais laukeliais. Jei lapas kirstų I, II, V ir VI laukelius, tai jis dengtų III laukelį. Tačiau aišku, kad stačiakampis 1×2 gali dengti kvadratą 1×1 tik tada, kai stačiakampio kraštinės atitinkamai lygiagrečios kvadrato kraštinėms. Taigi lapas neturėtų bendrų vidinių taškų nė su vienu iš I, II, V, VI laukelių, ir gautume prieštarą. Taigi lapas nekerta bent vieno iš I, II, V, ir VI laukelių. Lygiai taip pat įrodome, kad lapas nekerta bent vieno iš III, IV, VII ir VIII laukelių. Beje, aišku, kad lapas negali turėti bendrų taškų (ne tik vidinių) daugiau kaip su šešiais laukeliais.

Lapas, kertantis šešis juodus laukelius, pavaizduotas d) paveikslе, lapo centras yra III ir VI laukelių bendra viršūnė, o kraštinės sudaro su laukelių kraštinėmis 45° kampus. Įrodykime, kad jis tikrai kerta 6 juodus laukelius. Į kvadratą 2×2 įbrėžkime stačiakampį, kurio dvi kraštinės lygios 2, o kampai tarp stačiakampio ir kvadrato kraštinių lygūs 45° (žr.

e) pav.). Tada trikampiai ACD ir BDE statūs ir lygiašoniai, todėl $AD = \frac{CD\sqrt{2}}{2} = \sqrt{2}$, $BD = AB - AD = 2 - \sqrt{2}$, $DE = BD\sqrt{2} = 2\sqrt{2} - 2 < 1$, nes $\sqrt{2} < 1{,}5$. Taigi kitos dvi stačiakampio kraštinės mažesnės už 1, vadinasi, „paplatintas“ lapas (žr. d) pav.), kurio kraštinės 2 ir 1, kerta II, IV, V, VII (žinoma, taip pat III ir VI) laukelius.

d) 

e) 

Atsakymas. Su šešiais juodais laukeliais.

88. Žr. 76 uždavinį.

89. *Pirmas būdas.* Perrašome lygtį taip:

$$2(x^2 + y^2 - 2xy) + (x^2 - 2x + 1) = 1,$$
$$2(x - y)^2 + (x - 1)^2 = 1.$$

Aišku, kad $x = y$, nes kitaip (kadangi x ir y natūralieji skaičiai) kairė pusė būtų didesnė už 1. Todėl $(x - 1)^2 = 1$, $x = 2$, $y = x = 2$.

Antras būdas. Laukydami y parametru, spręskime duotąją lygtį x atžvilgiu. Gauname

$$3x^2 - 2(2y + 1)x + 2y^2 = 0,$$
$$x = \frac{2y + 1 \pm \sqrt{4y^2 + 4y + 1 - 6y^2}}{3}.$$

Kai $y = 1$, tai pošaknyje yra 3, todėl natūraliųjų sprendinių nėra.

Kai $y = 2$, gauname $x = 2$. Kai $y \geqslant 3$, pošaknis neigiamas: $-2y^2 + 4y + 1 = 2y(2 - y) + 1 \leqslant 2 \cdot 3 \cdot (-1) + 1 < 0$, ir sprendinių nėra.

Tą patį galima užrašyti, išskiriant pilnąjį kvadratą. Dauginame lygtį iš 3:

$$9x^2 - 6x(2y + 1) + 6y^2 = 0,$$
$$9x^2 - 2 \cdot 3x(2y + 1) + (2y + 1)^2 = (2y + 1)^2 - 6y^2,$$
$$(3x - 2y - 1)^2 = -2y^2 + 4y + 1.$$

Kai $y = 1$, tai $(3x-3)^2 = 3$, ir sveikųjų sprendinių nėra. Kai $y = 2$, tai $(3x-5)^2 = 1$, todėl $x = 2$. Pagaliau, kai $y \geqslant 3$, tai dešinė pusė neigiama: $-2y^2 + 4y + 1 = -2(y - 1)^2 + 3 \leqslant -2 \cdot 2^2 + 3 \leqslant -5$.

Atsakymas. (2; 2).

90. Žr. 78 uždavinį.

XXXVIII OLIMPIADA (1989 m.)

91. Išskaidę lygčių kairiąsias puses, gauname sistemą

$$\begin{cases} (x+2y)(x+2z) = -16, \\ (y+2x)(y+2z) = 8, \\ (z+2x)(z+2y) = -7. \end{cases} \qquad (1)$$

Trečios lygties kairės pusės dauginamieji gali įgyti tik reikšmes $\pm 1, \pm 7$.

Kai $\{z+2x = \mp 1, z+2y = \mp 7\}$, tai (visur imami arba viršutiniai, arba apatiniai ženklai) $\{z = -2x \pm 1, y = x \mp 4\}$. Įstatę šias y ir z išraiškas į (1) sistemos antrą lygtį, gauname $(3x \mp 4)(-3x \mp 2) = 8 \Leftrightarrow (3x \mp 4)(3x \pm 2) = -8 \Leftrightarrow (3x \mp 1 \mp 3)(3x \mp 1 \pm 3) = -8 \Leftrightarrow (3x \mp 1)^2 = 1 \Leftrightarrow x = 0$ (primename, kad x — sveikasis skaičius). Tada $y = \mp 4$, $z = \pm 1$, ir gauname sprendinius $(0; \mp 4; \pm 1)$. Patikrinę matome, kad jie tenkina ir (1) sistemos pirmą lygtį.

Kai $\{z+2x = \pm 7, z+2y = \mp 1\}$, tai $\{z = -2x \pm 7, y = x \mp 4\}$. Įstatome į (1) sistemos antrą lygtį: $(3x \mp 4)(-3x \pm 10) = 8 \Leftrightarrow (3x \mp 4)(3x \mp 10) = -8 \Leftrightarrow (3x \mp 7 \pm 3)(3x \mp 7 \mp 3) = -8 \Leftrightarrow (3x \mp 7)^2 = 1 \Leftrightarrow x = \mp 2$. Tada $y = \mp 2, z = \pm 3$, ir gauname sprendinius $(\pm 2; \mp 2; \pm 3)$, kurie tenkina ir pirmą lygtį.

Beje, pastebėjome, kad sistemai spręsti pirma lygtis nereikalinga. Lygiai taip pat sistemai išspręsti užtenka tik pirmos ir trečios lygčių arba tik pirmos ir antros lygčių. Kitaip sakant, kai x, y ir z yra sveikieji skaičiai, tai kiekviena lygtis yra kitų dviejų sistemos lygčių išvada.

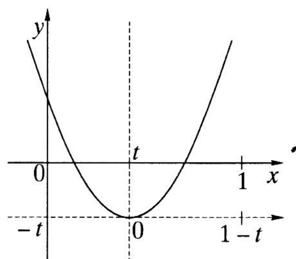
Atsakymas. $(0; 4; -1)$, $(0; -4; 1)$, $(2; -2; 3)$, $(-2; 2; -3)$.

92. Iš sąlygos išplaukia, kad a ir b nelygūs nuliui ir yra vieno ženklo (toliau nagrinėsime tik tokius a ir b). Ekvivalenčiai pertvarkome nelygybę:

$$|2\sqrt{2}ab - a^2 - 2b^2| < 2a(a - b\sqrt{2}),$$
$$|a^2 - 2\sqrt{2}ab + 2b^2| < 2a(a - b\sqrt{2}),$$
$$(a - b\sqrt{2})^2 - 2a(a - b\sqrt{2}) < 0,$$
$$(a - b\sqrt{2})(-a - b\sqrt{2}) < 0,$$
$$a^2 - 2b^2 > 0,$$
$$a^2 > 2b^2,$$
$$\frac{a^2}{b^2} > 2,$$

o paskutinė nelygybė ekvivalenti sąlygai.

93. Kadangi $a > 0$ ir šaknys yra tarp 0 ir 1, tai trinario $f(x) = ax^2 + bx + c$ grafiko — parabolės — šakos nukreiptos į viršų, $f(0) > 0$, $f(1) > 0$, o neigiamos reikšmės yra tarp šaknų (žr. pav.). Tačiau $f(0) = c$ ir $f(1) = a + b + c$ — sveikieji skaičiai, todėl $f(0) \geqslant 1$ ir $f(1) \geqslant 1$.



Pažymėkime parabolės viršūnės abscisę raide t. Patogu įvesti naują koordinačių sistemą, kurios pradžia — parabolės viršūnė, o ašys yra lygiagrečios senosios koordinačių sistemos ašims. Naujoje koordinačių sistemoje parabolės lygtis bus $g(x) = ax^2$. Dabar, jei $0 < t \leqslant \frac{1}{2}$, tai $a\left(\frac{1}{2}\right)^2 \geqslant at^2 = a(-t)^2 = g(-t) = f(0) - f(t) > f(0) \geqslant 1$, todėl $a > 4$. Lygiai taip pat, jei $1 > t > \frac{1}{2}$, tai $1 - t < \frac{1}{2}$ ir $a\left(\frac{1}{2}\right)^2 > a(1-t)^2 = g(1-t) = f(1) - f(t) > f(1) \geqslant 1 \Rightarrow a > 4$.

Tą patį galima parašyti šiek tiek kitaip. Išskirkime pilnąjį kvadratą:

$$f(x) = ax^2 + bx + c = a\left(\frac{x+b}{2a}\right)^2 + c - \frac{b^2}{4a} < a\left(\frac{x+b}{2a}\right)^2,$$

nes diskriminantas $b^2 - 4ac > 0$. Pagal Vijeto teoremą šaknų suma lygi $-\frac{b}{a}$, todėl iš sąlygos išplaukia, kad $0 < \frac{-b}{2a} < 1$. Kai $0 < \frac{-b}{2a} < \frac{1}{2}$, tai $1 \leqslant f(0) < a\left(0 + \frac{b}{2a}\right)^2 \leqslant a\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow a > 4$. Kai $\frac{1}{2} < \frac{-b}{2a} < 1$, tai $1 \leqslant f(1) < a\left(1 + \frac{b}{2a}\right)^2 < a\left(\frac{1}{2}\right)^2 \Rightarrow a > 4$. Beje, aišku, kad $t = \frac{-b}{2a}$.

Nesunku sugalvoti trinario su $a = 5$ pavyzdį. Natūralu imti mažiausias natūraliąsias $f(0)$ ir $f(1)$ reikšmes, t. y. $f(0) = f(1) = 1$. Tada $c = 1$ ir $5 + b + 1 = 1 \Rightarrow b = -5$. Gaumame trinarį $5x^2 - 5x + 1$. Iš tikrųjų, trinario šaknys $\frac{5 \pm \sqrt{5}}{10}$ teigiamos, mažesnės už 1 ir skirtingos.

Beje, kitų trinarių su $a = 5$, tenkinančių uždavinio sąlygą, nėra. Iš tikrųjų, užtenka įrodyti, kad $f(0) = f(1) = 1$. Turime

$$1 \leqslant c = f(0)g(-t) = 5t^2 \Rightarrow t \geqslant 1\sqrt{5}.$$

Tada $f(1) < g(1-t) \leqslant g\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right) = 5\left(1 - \frac{1}{\sqrt{5}}\right)^2 = 6 - 2\sqrt{5} < 2 \Rightarrow f(1) = 1$. Lygiai taip pat nustatome, kad $f(0) = 1$.

Atsakymas. $a = 5$, trinaris $5x^2 - 5x + 1$.

94. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad lygtis turi racionalųjį sprendinį $x = \frac{m}{n}$, $m, n \in N$ (aišku, kad $x > 0$). Tada $\sqrt{\frac{m^2}{n^2} - 1} = \frac{\sqrt{m^2 - n^2}}{n}$ taip pat racionalus, o $k = \sqrt{m^2 - n^2}$ — natūralusis skaičius. Gauname $n^2 + k^2 = m^2$. Mažiausieji natūralieji skaičiai, tenkinantys šią lygybę, yra 3, 4 ir 5. Taigi spėjame, kad $x = \frac{5}{3}$. Iš tikrųjų, $\frac{5}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{25/9 - 1}}\right) = \frac{5}{3} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{16/9}}\right) = \frac{5}{3} \cdot \left(1 + \frac{3}{4}\right) = \frac{35}{12}$. Kita vertus, $x = \frac{5}{4}$ taip pat yra sprendinys: $\frac{5}{4} \cdot \left(1 + \frac{1}{\sqrt{25/16 - 1}}\right) = \frac{5}{4} \cdot \left(1 + \frac{4}{3}\right) = \frac{35}{12}$.

Raskime kitus sprendinius. Iš pradinės lygties gauname

$$\frac{x}{\sqrt{x^2 - 1}} = \frac{35}{12} - x \Rightarrow$$

$$\frac{x^2}{x^2-1}=\frac{1225}{144}-\frac{35x}{6}+x^2 \Rightarrow$$
$$x^2-\frac{35x}{6}+\frac{1081}{144}-\frac{1}{x^2-1}=0 \Rightarrow$$
$$x^4-x^2-\frac{35x^3}{6}+\frac{35x}{6}+\frac{1081x^2}{144}-\frac{1081}{144}-1=0 \Rightarrow$$
$$x^4-\frac{35x^3}{6}+\frac{937x^2}{144}+\frac{35x}{6}-\frac{1225}{144}=0 \Rightarrow$$
$$144x^4-840x^3+937x^2+840x-1225=0. \qquad (1)$$

Žinome du lygties sprendinius $\frac{5}{3}$ ir $\frac{5}{4}$, todėl kairė pusė dalijasi iš $x-\frac{5}{3}$ ir $x-\frac{5}{4}$, arba iš $3x-5$ ir $4x-5$. Skaidome (1) lygties kairę pusę:

$$48x^3(3x-5)-200x^2(3x-5)-21x(3x-5)+245(3x-5)=$$
$$=(3x-5)(48x^3-200x^2-21x+245)=$$
$$=(3x-5)\big(12x^2(4x-5)-35x(4x-5)-49(4x-5)\big)=$$
$$=(3x-5)(4x-5)\cdot(12x^2-35x-49).$$

Vadinasi, (1) lygties sprendiniai, nelygūs $\frac{5}{3}$ ir $\frac{5}{4}$, tenkina lygtį

$$12x^2-35x-49=0 \Leftrightarrow$$
$$x=\frac{35\pm\sqrt{35^2+4\cdot 12\cdot 7^2}}{24}=\frac{35\pm 7\sqrt{5^2+4\cdot 12}}{24}=\frac{35\pm 7\sqrt{73}}{24}.$$

Iš duotosios lygties matome, kad $0<x<\frac{35}{12}$, todėl abu gautieji sprendiniai netinka, nes vienas iš jų neigiamas, o kitas didesnis už $\frac{35}{12}$.

Antras būdas. Pažymėkime $u=\frac{1}{x}$, $v=\frac{\sqrt{x^2-1}}{x}$ (aišku, kad $x>0$, todėl $u>0$ ir $v>0$). Tada

$$\begin{cases}\frac{1}{u}+\frac{1}{v}=\frac{35}{12},\\ u^2+v^2=1;\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\frac{(u+v)^2}{(uv)^2}=\frac{35^2}{12^2},\\ u^2+v^2=1;\end{cases} \Rightarrow \frac{1+2uv}{(uv)^2}=\frac{35^2}{12^2} \Rightarrow 35^2(uv)^2-2\cdot 12^2(uv)-12^2=0,$$

$$uv=\frac{12^2\pm\sqrt{12^4+12^2\cdot 35^2}}{35^2}=\frac{12^2\pm 12\sqrt{1369}}{35^2}=\frac{12^2\pm 12\cdot 37}{35^2}\Rightarrow uv=\frac{12\cdot 7^2}{35^2}=\frac{12}{25},$$

nes $uv>0$. Iš pirmos lygties gauname, kad $u+v=\frac{35}{12}\cdot uv=\frac{7}{5}$. Sprendžiame sistemą

$$\begin{cases}u+v=\frac{7}{5},\\ uv=\frac{12}{25};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=\frac{7}{5},\\ (u+v)^2-4uv=\frac{49}{25}-\frac{48}{25};\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}u+v=\frac{7}{5},\\ u-v=\pm\frac{1}{5};\end{cases} \Leftrightarrow$$
$$(u;\,v)\in\left\{\left(\frac{4}{5};\,\frac{3}{5}\right),\left(\frac{3}{5};\,\frac{4}{5}\right)\right\}.$$

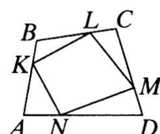
Vadinasi, $x=\frac{5}{4}$ arba $x=\frac{5}{3}$. Abi šios reikšmės tenkina duotąją lygtį.

Atsakymas. $\frac{5}{4}$; $\frac{5}{3}$.

95. Kadangi $S = \frac{ah_a}{2} \leqslant \frac{ab}{2} \leqslant \frac{1\cdot 2}{2} \leqslant 1$, tai plotas negali būti didesnis už 1. Kad plotas būtų lygus 1, turi būti $a = 1$, $h_a = b = 2$, t. y. iš kampo A nuleista aukštinė turi sutapti su kraštine b, kitaip sakant kampas C turi būti status. Reikia dar įsitikinti, kad kraštinė c tenkina sąlygą. Bet $c^2 = a^2 + b^2 = 1 + 4 = 5$, ir matome, kad statusis trikampis, kurio kraštinės 1, 2 ir $\sqrt{5}$, tenkina sąlygą.

Atsakymas. Didžiausias plotas lygus 1.

96. Pažymėkime $p = \frac{AK}{AB} = \frac{BL}{BC} = \frac{CM}{CD} = \frac{DN}{DA}$ (žr. pav.). Tada $\frac{BK}{BA} = 1 - \frac{AK}{AB} = 1 - p$ ir $S_{KBL} : S_{ABC} = (BK \cdot \frac{BL}{2} \cdot \sin B) : (BA \cdot \frac{BC}{2} \cdot \sin B) = \frac{BK}{BA} \cdot \frac{BL}{BC} = p(1 - p)$.



Lygiai taip pat $S_{LCM} : S_{BCD} = S_{MDN} : S_{CDA} = S_{NAK} : S_{DAB} = p(1 - p)$.

Remiantis vidurkių teorema, $\sqrt{p(1-p)} \leqslant \frac{p+1-p}{2} \Rightarrow p(1 - p) \leqslant \frac{1}{4}$ (arba kitaip: $p(1 - p) = \frac{1}{4} - (\frac{1}{2} - p)^2 \leqslant \frac{1}{4}$). Taigi

$$\begin{aligned} S_{KLMN} &= S_{ABCD} - S_{KBL} - S_{LCM} - S_{MDN} - S_{NAK} = \\ &= S_{ABCD} - p(1-p)(S_{ABC} + S_{CDA} + S_{BCD} + S_{DAB}) = \\ &= S_{ABCD} - p(1-p)(S_{ABCD} + S_{ABCD}) = \\ &= S_{ABCD}\big(1 - 2p(1-p)\big) \geqslant S_{ABCD}\Big(1 - 2\cdot\frac{1}{4}\Big) = \frac{S_{ABCD}}{2}. \end{aligned}$$

97. Didžiausias skaičius 12 turi būti lygus kitų dviejų skaičių, esančių toje pačioje grupėje, sumai. Sakykime, kad $12 = 11 + 1$. Didžiausias iš likusių skaičų 10 turi būti lygus kitų dviejų skaičių, esančių toje pačioje grupėje, sumai. Kadangi 1 jau užimtas, tai galimi trys atvejai:

$$10 = 8 + 2, \qquad 10 = 7 + 3, \qquad 10 = 6 + 4.$$

Kai $10 = 8 + 2$, tai didžiausias iš likusių skaičių 9 gali būti išreikštas dviejų skaičių suma dviem būdais: $9 = 6 + 3$ arba $9 = 5 + 4$ (nes skaičiai 1 ir 2 jau užimti). Jei $9 = 6 + 3$, tai lieka skaičiai 7, 5 ir 4, bet $7 \neq 5 + 4$. Jei $9 = 5 + 4$, tai lieka skaičiai 7, 6 ir 3, bet $7 \neq 6 + 3$.

Kai $10 = 7 + 3$, tai didžiausias iš likusių skaičių 9 vieninteliu būdu gali būti išreikštas dviejų skaičių suma: $9 = 5 + 4$ (nes 1, 7, 3 jau užimti). Lieka $8 = 6 + 2$, ir gauname reikiamą skirstinį: $12 = 11 + 1, 10 = 7 + 3, 9 = 5 + 4, 8 = 6 + 2$.

Kai $10 = 6 + 4$, turime skirstinį $12 = 11 + 1$, $10 = 6 + 4$, $9 = 7 + 2$, $8 = 5 + 3$.

Atsakymas. Galima, pavyzdžiui, (12, 11, 1), (10, 7, 3), (9, 5, 4), (8, 6, 2).

98. Nelyginio skaičiaus kvadrato dalybos iš 4 (ir iš 8) liekana lygi 1, nes $(2k + 1)^2 = 4k(k + 1) + 1$, o $k(k + 1)$ yra lyginis skaičius.

Kadangi duotosios lygybės dešinė pusė yra nelyginis skaičius, tai kairė pusė yra nelyginio skaičiaus x^y kvadratas. Tačiau, kai $z \geqslant 2$, skaičiaus $2^z - 1$ dalybos iš 4 liekana lygi 3, nes $2^z - 1 = 4(2^{z-2} - 1) + 3$. Taigi $z = 1$. Tada $x^{2y} = 1$ ir $x = 1$, o y — bet koks natūralusis skaičius.

Atsakymas. $(x; y; z) = (1; n; 1), n \in \boldsymbol{N}$.

99. Pažymėkime $u = 1988 + x$, $v = 1988 + y$, $b = 1988 + a$. Reikia įrodyti, kad jei $\sqrt{u} + \sqrt{v} = 2\sqrt{b}$, tai $u - 1988 + v - 1988 \geqslant 2(b - 1988) \Leftrightarrow u + v \geqslant 2b$ (matome, kad skaičiai 1988 dirbtinai įdėti į sąlygą). Aišku, kad užtenka įrodyti nelygybę

$$\frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{u+v}{2}}, \quad \text{kai } u, v \geqslant 0 \tag{1}$$

(kvadratinių šaknų iš dviejų neneigiamų skaičių vidurkis ne didesnis už kvadratinę šaknį iš vidurkio). Tada tikrai

$$\sqrt{b} = \frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{u+v}{2}} \Rightarrow b \leqslant \frac{u+v}{2} \Rightarrow 2b \leqslant u + v.$$

(1) nelygybę nesunku įrodyti remiantis analogiška skaičių kvadratų nelygybe:

$$\begin{aligned} &\left(\frac{c+d}{2}\right)^2 \leqslant \frac{c^2+d^2}{2} \Leftrightarrow \\ &c^2 + d^2 + 2cd \leqslant 2c^2 + 2d^2 \Leftrightarrow \\ &0 \leqslant (c-d)^2. \end{aligned} \tag{2}$$

Užtenka į (2) nelygybę įstatyti $c = \sqrt{u}$, $d = \sqrt{v}$:

$$\left(\frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{2}\right)^2 \leqslant \frac{u+v}{2} \Rightarrow \frac{\sqrt{u} + \sqrt{v}}{2} \leqslant \sqrt{\frac{u+v}{2}}.$$

100. Kadangi $C + D = 360° - A - D$, tai $\cos(\frac{C}{2} + \frac{D}{2}) = \cos(180° - \frac{A}{2} - \frac{B}{2}) = -\cos(\frac{A}{2} + \frac{B}{2})$. Remiantis sąlyga ir kosinusų sumos ir skirtumo formulėmis,

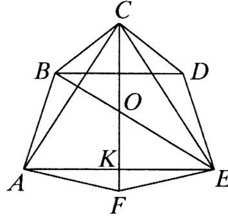
$$\begin{aligned} 0 &= \cos A + \cos B + \cos C + \cos D = 2\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) + \\ &\quad + 2\cos\left(\frac{C}{2} + \frac{D}{2}\right)\cos\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{2}\right) = \\ &= 2\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\left(\cos\left(\frac{A}{2} - \frac{B}{2}\right) - \cos\left(\frac{C}{2} - \frac{D}{2}\right)\right) = \\ &= -4\cos\left(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}\right)\sin\left(\frac{A}{4} - \frac{B}{4} + \frac{C}{4} - \frac{D}{4}\right) \cdot \sin\left(\frac{A}{4} - \frac{B}{4} - \frac{C}{4} + \frac{D}{4}\right). \end{aligned}$$

Jei $\cos(\frac{A}{2} + \frac{B}{2}) = 0$, tai $\frac{A}{2} + \frac{B}{2} = 90°$, $A + B = 180°$.

Jei $\sin(\frac{A}{4} - \frac{B}{4} + \frac{C}{4} - \frac{D}{4}) = 0$, tai $\frac{A}{4} - \frac{B}{4} + \frac{C}{4} - \frac{D}{4} = 0$, nes $|\frac{A}{4} - \frac{B}{4} + \frac{C}{4} - \frac{D}{4}| \leqslant \frac{A}{4} + \frac{B}{4} + \frac{C}{4} + \frac{D}{4} = 90°$. Tada $A - B + C - D = 0$. Bet $A + B + C + D = 360°$, todėl $A + C = B + D = 180°$.

Jei $\sin(\frac{A}{4} - \frac{B}{4} - \frac{C}{4} + \frac{D}{4}) = 0$, tai panašiai įrodome, jog $A + D = 180°$.

101. Trikampiai ABC, CDE ir EFA lygūs ir lygiašoniai (žr. pav.). Pažymėkime įstrižainės AE vidurio tašką K ir lygiakraščio trikampio ACE centrą O. Tada $CK \perp AE$, nes CK yra lygiakraščio trikampio ACE pusiaukraštinė. Panašiai $FK \perp AE$. Todėl taškas K yra įstrižainėje CF. Taigi $CF = CK + KF = AC\frac{\sqrt{3}}{2} + \sqrt{AF^2 - AK^2} = \frac{a\sqrt{3}}{2} + \frac{\sqrt{1-a^2}}{4} = \frac{a\sqrt{3}+\sqrt{4-a^2}}{2}$. Aišku, kad apskaičiavę AD ir BE, gausime tą pačią išraišką, todėl $AD = BE = CF$.



Kadangi $BO = DO = FO = OK + KF + \frac{a\sqrt{3}}{6} + \frac{\sqrt{4-a^2}}{2}$ ir $\angle BOD = \angle DOF = \angle FOB = 180^\circ - \angle CAE = 120^\circ$, tai trikampis BDF lygiakraštis. Vadinasi, $BD = DF = FB = OF\sqrt{3} = \frac{a}{2} + \frac{\sqrt{3(4-a^2)}}{2}$.

Išsiaiškinsime, kokias reikšmes gali įgyti a. Atkarpos 1, 1 ir a sudaro trikampį, taigi $a < 2$. Kita vertus, šešiakampis bus iškilas tada ir tik tada, kai vidaus kampas A (aišku, kad kampai A, C ir E lygūs) mažesnis už 180°, t. y. $\angle BAC + \angle CAE + \angle EAF < 180^\circ \Leftrightarrow 2\angle BAC < 120^\circ \Leftrightarrow \angle BAC < 60^\circ \Leftrightarrow AB < AC \Leftrightarrow 1 < a$. Taigi $1 < a < 2$.

Ir atvirkščiai, jei $1 < a < 2$, tai nubraižę lygiakraštį trikampį ACE su kraštine a ir jo išorėje lygiašonius trikampius ABC, CDE ir EFA, kurių šoninės kraštinės lygios 1, gausime iškiląjį šešiakampį, tenkinantį uždavinio sąlygą.

Atsakymas. $BD = DF = FB = \frac{a+\sqrt{3(4-a^2)}}{2}$, $AD = BE = CF = \frac{a\sqrt{3}+\sqrt{4-a^2}}{2}$; $1 < a < 2$.

102. *Pirmas būdas.* Sudarykime pirmųjų natūraliųjų skaičių sumų ir jų kvadratų sumų lentelę. Antroje eilutėje rašykime natūraliuosius skaičius, trečioje — jų kvadratus, pirmoje — jų sumas, ketvirtoje — jų kvadratų sumas. Aišku, kad bet kuris pirmos eilutės skaičius, išskyrus pirmąjį, lygus dviejų skaičių — esančio prieš jį ir esančio po juo — sumai, o ketvirtos eilutės skaičius — esančio prieš jį ir esančio virš jo sumai. Lentelę tęsiame tol, kol pirmoje eilutėje pirmąkart gauname skaičių, jau esantį ketvirtoje eilutėje.

1	3	6	10	15	21	28	36	45	**55**
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
1	4	9	16	25	36	49	64	81	100
1	5	14	30	**55**	91	140	204	285	385

Matome, kad $1 + 2 + \cdots + 10 = 55 = 1^2 + 2^2 + \cdots + 5^2$, taigi tinka pora $m = 10$, $n = 5$.

Antras būdas. Pertvarkykime duotąją lygybę: $\frac{m(m+1)}{2} = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$, $4m^2 + 4m = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{3}$,

$$(2m+1)^2 = \frac{4n(n+1)(2n+1)}{3} + 1. \qquad (1)$$

Kai $n = 2$, tai dešinė (1) lygybės pusė lygi 41 ir nėra kvadratas. Kai $n = 3$, dešinė pusė lygi 113, kai $n = 4$ — lygi 241. Kai $n = 5$, dešinė pusė lygi 441, ir gauname sprendinį $m = 10, n = 5$. Kai $n = 6$, dešinė pusė lygi 729, ir gauname sprendinį $m = 13$, $n = 6$.

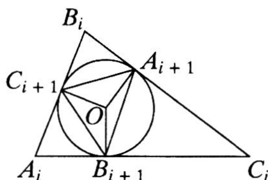
Naudojantis skaičiuokliu nesunku patikrinti, sakysime, visas n reikšmes iki 100 (užtenka apskaičiuoti (1) lygybės dešinę pusę ir, ištraukus kvadratinę šaknį, pasižiūrėti, ar gavome sveikąjį skaičių). Taip randame dar vieną sprendinį: $m = 645, n = 85$.

Įdomu, kad naudojantis skaičiuokliu galima įsitikinti, kad, sakysime, iki $n = 10^5$ daugiau tinkamų reikšmių nėra.

Atsakymas. Egzistuoja; pavyzdžiui, $m = 10, n = 5$.

103. Aišku, kad du gretimi natūralieji skaičiai yra tarpusavyje pirminiai (t. y. neturi bendrų daliklių, išskyrus ± 1). Taigi galima skaičius surašyti paeiliui taip: $1, 3, 5, \ldots, 2n - 1, 2, 4, 6, \ldots, 2n$. Tada diametraliai priešingose viršūnėse bus tarpusavyje pirminiai skaičiai 1 ir 2, 3 ir 4, 5 ir 6, ..., $2n - 1$ ir $2n$.

104. Įbrėžtinio apskritimo centrą pažymėkime raide O (žr. pav.), o trikampių viršūnes pažymėkime taip, kad prieš viršūnes A_i, B_i, C_i atitinkamai būtų viršūnės A_{i+1}, B_{i+1}, C_{i+1}.



Kadangi $\angle OB_{i+1}A_i = \angle OC_{i+1}A_i = 90°$, tai centrinis kampas $B_{i+1}OC_{i+1} = 180° - A_i$, o įbrėžtinis kampas $A_{i+1} = \frac{\angle B_{i+1}OC_{i+1}}{2} = 90° - \frac{A_1}{2}$. Paeiliui gauname

$$\begin{aligned}
A_2 &= 90° - \frac{A_1}{2}, \\
A_3 &= 90° - \frac{90°}{2} + \frac{A_1}{4}, \\
A_4 &= 90° - \frac{90°}{2} + \frac{90°}{4} - \frac{A_1}{8}, \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, \\
A_m &= 90° - \frac{90°}{2} + \frac{90°}{4} - \cdots + \frac{90°}{(-2)^{m-2}} + \frac{A_1}{(-2)^{m-1}}.
\end{aligned}$$

Pagal geometrinės progresijos narių sumos formulę

$$A_m = \frac{90° - \frac{90°}{(-2)^{m-1}}}{1 + \frac{1}{2}} + \frac{A_1}{(-2)^{m-1}} = 60° + \frac{A_1 - 60°}{(-2)^{m-1}}.$$

Tačiau $|A_1 - 60°| < 120°$, todėl užtenka paimti $m = 8$. Tada

$$A_8 < 60° + \frac{120°}{2^{8-1}} < 61°.$$

Lygiai taip pat $B_8 < 61°$ ir $C_8 < 61°$.

Tą patį galima parašyti kiek kitaip. Remiantis formule $A_2 = 90^\circ - \frac{A_1}{2}$,

$$A_2 = 60^\circ + \frac{60^\circ - A_1}{2}.$$

Tada

$$A_3 = 60^\circ + \frac{60^\circ - A_2}{2} = 60^\circ - \frac{60^\circ - A_1}{4},$$
$$A_4 = 60^\circ + \frac{60^\circ - A_3}{2} = 60^\circ + \frac{60^\circ - A_1}{8},$$
$$A_5 = 60^\circ - \frac{60^\circ - A_1}{16}, \quad A_6 = 60^\circ + \frac{60^\circ - A_1}{32},$$
$$A_7 = 60^\circ - \frac{60^\circ - A_1}{64}, \quad A_8 = 60^\circ + \frac{60^\circ - A_1}{128},$$

ir $A_8 < 61^\circ$.

105. *Pirmas būdas.* Iš pirmos lygties atimame antrą:

$$x^2 - (x-8)^2 + (y-3)^2 - y^2 = -9,$$
$$16x - 64 - 6y + 9 = -9,$$
$$16x - 6y - 46 = 0,$$
$$8x - 3y - 23 = 0.$$

Išsireiškiame $y = \frac{8x-23}{3}$ ir įstatome į antrą lygtį:

$$9(x-8)^2 + (8x-23)^2 = 225,$$
$$73x^2 - 512x + 880 = 0. \qquad (1)$$

Kadangi diskriminantas lygus $512^2 - 4\cdot73\cdot880 = 4(256^2 - 73\cdot880) = 4^3\cdot(64^2 - 73\cdot55) = 4^3(64^2 - (64+9)(64-9)) = 4^3.9^2 = 72^2$, tai $x_1 = \frac{512+72}{2\cdot73} = \frac{256+36}{73} = 4$, $x_2 = \frac{256-36}{73} = \frac{220}{73}$.

Tada $y_1 = 3$, $y_2 = \frac{27}{73}$. Sprendinius patikriname.

Antras būdas. Žinant sprendinį $(x_0; y_0)$, labai dažnai padeda keitinys $x = x_0 + u$, $y = y_0 + v$. Dalykas tas, kad naujos sistemos vienas sprendinys $(u; v)$ bus $(0; 0)$, o tada galima tikėtis, kad sistema bus paprastesnė. Pastebėti sprendinį $(4; 3)$ nesunku.

Taigi keičiame $x = 4 + u$, $y = 3 + v$. Tada

$$\begin{cases} (4+u)^2 + v^2 = 16, \\ (u-4)^2 + (v+3)^2 = 25, \end{cases}$$

$$\begin{cases} u^2 + 8u + v^2 = 0, \\ u^2 - 8u + v^2 + 6v = 0. \end{cases}$$

Atėmę lygtis vieną iš kitos, turime $16u - 6v = 0$, $v = \frac{8u}{3}$. Įstatę į pastarosios sistemos pirmą lygtį, turime $u^2 + 8u + \frac{64u^2}{9} = 0$, $u(73u + 72) = 0$. Žodžiu, gavome paprastesnę lygtį, negu spręsdami pirmu būdu. Dabar turime $u_1 = 0$, $v_1 = 0$, $x_1 = 4$, $y_1 = 3$ ir $u_2 = -\frac{72}{73}$, $v_2 = -8\cdot\frac{24}{73}$, $x_2 = 4 - \frac{72}{73} = \frac{220}{73}$, $y_2 = 3 - 8\cdot\frac{24}{73} = 3(1 - \frac{64}{73}) = 3\cdot\frac{9}{73} = \frac{27}{73}$.

Atsakymas. $(4; 3)$, $(\frac{220}{73}; \frac{27}{73})$.

106. *Pirmas būdas.* Pasižymėję $x^2 = y$, turime lygtį

$$y^2 - 2y + q = 0. \qquad (1)$$

Ji turi sprendinių, kai $D = 4 - 4q \geqslant 0$, t. y. kai $q \leqslant 1$. Kai ši sąlyga išpildyta, turime

$$y = 1 \pm \sqrt{1-q}.$$

Išnagrinėkime, kiek čia turime sprendinių. Kai $q = 1$, turime vieną sprendinį $y = 1$. Tada $x = \pm 1$, bet du skaičiai nesudaro aritmetinės progresijos. (Beje, jeigu laikytume, kad yra du lygūs sprendiniai $y = 1$, tai turėtume du lygius sprendinius $x = 1$ ir du lygius sprendinius $x = -1$. Aišku, kad jokie trys iš jų nesudaro aritmetinės progresijos.)

Kai $0 < q < 1$, turime dvi skirtingas teigiamas y reikšmes ir atitinkamai keturias skirtingas x reikšmes

$$x = \pm\sqrt{1 \pm \sqrt{1-q}}.$$

Išrikiuojame jas didėjimo (galima — mažėjimo) tvarka:

$$-\sqrt{1+\sqrt{1-q}}, \quad -\sqrt{1-\sqrt{1-q}}, \quad \sqrt{1-\sqrt{1-q}}, \quad \sqrt{1+\sqrt{1-q}}.$$

Kad šie keturi skaičiai sudarytų aritmetinę progresiją, būtina, kad būtų

$$2\sqrt{1-\sqrt{1-q}} = \sqrt{1+\sqrt{1-q}} + \left(-\sqrt{1-\sqrt{1-q}}\right),$$

$$3\sqrt{1-\sqrt{1-q}} = \sqrt{1+\sqrt{1-q}}, \quad 9 = 9\sqrt{1-q} = 1 + \sqrt{1-q},$$

$$10\sqrt{1-q} = 8, \quad 1 - q = 0{,}8^2, \quad q = 0{,}36.$$

Bet jei $q = 0{,}36$, tai nagrinėjami keturi skaičiai

$$-3\sqrt{0{,}2}, \quad -\sqrt{0{,}2}, \quad \sqrt{0{,}2}, \quad 3\sqrt{0{,}2},$$

tikrai sudaro aritmetinę progresiją.

Kai $q = 0$, turime du sprendinius $y = 2$ ir $y = 0$. Juos atitinka trys sprendiniai $x = -\sqrt{2}$, $x = 0$ ir $x = \sqrt{2}$, kurie sudaro aritmetinę progresiją. (Žinoma, jei laikysime, kad yra du lygūs sprendiniai $x = 0$, tai skaičiai $-\sqrt{2}, 0, 0, \sqrt{2}$ nesudaro aritmetinės progresijos.)

Pagaliau, kai $q < 0$, tai turime tik vieną neneigiamą sprendinį $y = 1 + \sqrt{1-q}$. Todėl turėsime tik du duotosios lygties sprendinius.

Antras būdas. Jeigu x_0 yra lygties sprendinys, tai ir $-x_0$ yra jos sprendinys. Todėl lygtis gali turėti 4 sprendinius $-x_2$, $-x_1$, x_1, x_2 (kai nėra sprendinio, lygaus nuliui) ir 3 sprendinius $-x_2, 0, x_2$ (kai yra sprendinys 0).

Pirmu atveju $2x_1 = x_2 + (-x_1)$, $3x_1 = x_2$. Bet jei pradinė lygtis turi sprendinius x_1 ir x_2, tai (1) lygtis turi sprendinius x_1^2 ir x_2^2. Pagal Vijeto teoremą $x_1^2 + x_2^2 = 2$, $x_1^2 + 9x_1^2 = 2$, $10x_1^2 = 2$, $x_1^2 = 0{,}2$, tada $q = x_1^2 x_2^2 = x_1^2 \cdot 9x_1^2 = 0{,}2 \cdot 1{,}8 = 0{,}36$.

Antru atveju, kai 0 yra sprendinys, tai 0 verčia lygtį teisinga lygybė $0^4 - 2 \cdot 0^2 + q = 0$. Todėl $q = 0$.

Abi gautas q reikšmes tikriname.

Atsakymas. 0,36 ir 0 (kai $q = 0{,}36$, turime 4 sprendinius, sudarančius aritmetinę progresiją; kai $q = 0$, tai turime 3 sprendinius, sudarančius aritmetinę progresiją).

107. Perrašykime lygtį taip:

$$2x^2(y^2-3)=12-y^2.$$

Aišku, kad $y^2 \leqslant 12$: jei $y^2 > 12$, tai dešinė lygties pusė neigiama, o kairė — neneigiama. Kadangi $x \neq 0$ (kitaip būtų $y^2 = 12$), tai aišku, kad $y^2 \geqslant 3$: jei $y^2 < 3$, kairė pusė būtų neigiama. Vadinasi, $3 \leqslant y^2 \leqslant 12$. Bet iš lygties matome, kad y lyginis skaičius, o tarp 3 ir 12 yra tik vienas lyginis kvadratas: 4. Taigi $y^2 = 4$, $y = \pm 2$, o tada $x^2 = 4$, $x = \pm 2$. Gauname 4 sprendinius $x = \pm 2$, $y = \pm 2$.

Atsakymas. $(-2;-2)$, $(-2;2)$, $(2;-2)$, $(2;2)$.

108. Iš duotosios nelygybės gauname: $\sin A\cos A = \sin B\cos B$, $\sin 2A - \sin 2B = 0$, $2\sin(A-B)\cos(A+B) = 0$. Jei $\sin(A-B) = 0$, tai kadangi $|A-B| < 180^\circ$, turime $A - B = 0$, ir trikampis lygiašonis, — prieštara. Vadinasi, $\cos(A+B) = 0$. Bet $0^\circ < A + B < 180^\circ$, todėl $A + B = 90^\circ$, taigi $C = 180^\circ - A - B = 90^\circ$.

Atsakymas. 90°.

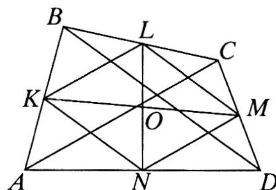
109. Pažymėkime ieškomąjį skaičių $\overline{...dcba}$. Tada

$$a + 10b + 100c + 1000d + \cdots = 19(a+b+c+d+\cdots),$$
$$(100-19)c + (1000-19)d + \cdots = 18a + 9b.$$

Kadangi $18a + 9b \leqslant 27 \cdot 9 = 243$, tai aišku, kad $d = 0$, $e = 0$ ir t.t., o $c \leqslant 3$. Kadangi ieškome didžiausio skaičiaus $\overline{cba}$, tai imame $c = 3$, ir lygybė $243 = 18a + 9b$ galima tik kai $a = 9$ ir $b = 9$. Vadinasi, ieškomasis skaičius yra 399.

Atsakymas. 399.

110. Pažymėkime keturkampio viršūnes A, B, C, D, kraštinių AB, BC, CD, DA vidurio taškus K, L, M, N (žr. pav.). Pagal sąlygą $BD = AC = a$. Kadangi KL yra trikampio ABC vidurinė linija, tai $KL = \frac{a}{2}$. Analogiškai ir $LM = MN = NK = \frac{a}{2}$, todėl $KLMN$ — rombas. Vadinasi, jo įstrižainės LN ir KM statmenos. Pažymėję jų ilgius d_1 ir d_2, o sankirtos tašką O, turime: $KO^2 + ON^2 = KN^2$, arba $\frac{d_2^2}{4} + \frac{d_1^2}{4} = \frac{a^2}{4}$, t.y. $d_1^2 + d_2^2 = a^2$. Kita vertus, pagal sąlygą $d_1 + d_2 = b$. Iš paskutinių dviejų lygčių galima būtų rasti d_1 ir d_2, bet mums to neprireiks.



Įrodysime, kad duotojo keturkampio plotas lygus dvigubam rombo plotui: $S = S_{ABCD} = 2S_{KLMN}$. Iš tikrųjų, trikampiai ABC ir KBL panašūs. Jų kraštinių santykis lygus $2:1$, todėl $S_{KBL} = \frac{S_{ABC}}{4}$. Taip pat $S_{NDM} = \frac{S_{ADC}}{4}$, taigi $S_{KBL} + S_{NDM} = \frac{S_{ABC}+S_{ADC}}{4} = \frac{S}{4}$. Analogiškai $S_{LCM} + S_{AKN} = \frac{S}{4}$, ir minėtų keturių kampinių trikampių plotas lygus $\frac{S}{2}$. Todėl likusios dalies — rombo $KLMN$ — plotas taip pat lygus $\frac{S}{2}$, ir $S = 2S_{KLMN}$.

Rombo plotas $S_{KLMN} = \frac{d_1 d_2}{2} = \frac{(d_1+d_2)^2-(d_1^2+d_2^2)}{4} = \frac{b^2-a^2}{4}$, taigi $S = \frac{b^2-a^2}{2}$.

Atsakymas. $\frac{b^2-a^2}{2}$.

111. Kadangi $1989 = 9 \cdot 221 = 9 \cdot (15^2 - 2^2) = 9 \cdot 17 \cdot 13$, tai $13x^2 + 17y^2 = 9^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2$. Dešinė pusė ir kairės pusės antras dėmuo dalijasi iš 17, todėl ir pirmas dėmuo dalijasi iš 17. Taigi x^2 dalijasi iš 17, ir x dalijasi iš 17, t. y. $x = 17m$. Analogiškai, kadangi y^2 dalijasi iš 13, tai ir y dalijasi iš 13, ir $y = 13n$ $(m, n \in \boldsymbol{N})$. Įstatome x ir y išraiškas į lygtį:

$$13 \cdot 17^2 m^2 + 17 \cdot 13^2 n^2 = 9^2 \cdot 13^2 \cdot 17^2.$$

Suprastiname:

$$17m^2 + 13n^2 = 9^2 \cdot 13 \cdot 17.$$

Vėl m dalijasi iš 13, todėl $m = 13a$, o n dalijasi iš 17, todėl $n = 17b$ $(a, b \in \boldsymbol{N})$. Įstatome m ir n išraiškas:

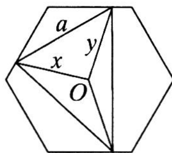
$$17 \cdot 13^2 a^2 + 13 \cdot 17^2 b^2 = 9^2 \cdot 13 \cdot 17, \qquad 13a^2 + 17b^2 = 81.$$

Kadangi $13a^2 < 81$, tai $a \leqslant 2$. Kai $a = 1$, tai $17b^2 = 68$, $b^2 = 4$, $b = 2$. Kai $a = 2$, tai $17b^2 = 29$, ir sprendinių nėra.

Vadinasi, $m = 13a = 13$, $n = 17b = 17 \cdot 2$, o $x = 17m = 13 \cdot 17 = 15^2 - 2^2 = 221$, $y = 13n = 2 \cdot 13 \cdot 17 = 2 \cdot 221 = 442$.

Atsakymas. (221; 442).

112. Sujunkime šešiakampio centrą O su trikampio viršūnėmis (žr. pav.). Kiekviena iš tų trijų atkarpų ne didesnė už 1 — tai iš karto aišku, apibrėžus apie šešiakampį apskritimą (jo spindulys 1). Kadangi pilnasis kampas apie tašką O yra 360°, o atkarpos dalija jį į 3 dalis, tai bent vienas iš atkarpų sudaromų kampų ne didesnis už 120°. Pažymėkime tokį kampą A, jį sudarančias atkarpas x ir y, jų galus jungiančią įbrėžto trikampio kraštinę a. Tada pagal kosinusų teoremą $a^2 = x^2 + y^2 - 2xy \cos A$.



Jei $A \leqslant 90°$, tai $-2xy \cos A \leqslant 0$. Jei $90° < A \leqslant 120°$, tai $0 < -\cos A \leqslant \frac{1}{2}$, todėl $-2xy \cos A \leqslant xy \leqslant 1$. Abiem atvejais $-2xy \cos A \leqslant 1$ ir $a^2 \leqslant 1 + 1 + 1$, t. y. $a \leqslant \sqrt{3}$. Vadinasi, mažiausia trikampio kraštinė ne didesnė už $\sqrt{3}$.

113. *Pirmas būdas.* Atimame iš pirmos lygties antrą lygtį:

$$\begin{aligned}
&(x^2 - 2x + 1)y - (y^2 - 2y + 1)x = x^2 - y^2 - 2x + 2y, \\
&xy(x - y) - x + y = x^2 - y^2 - 2x + 2y, \\
&xy(x - y) + x - y = x^2 - y^2, \\
&(x - y)(xy + 1) = (x - y)(x + y).
\end{aligned}$$

Perkeliame į vieną pusę ir skaidome:

$$(x - y)(xy - x - y + 1) = 0, \qquad (x - y)(x - 1)(y - 1) = 0.$$

Kai $x = 1$, tai pirma lygtis virsta $0 \cdot y = 8$, o kai $y = 1$, — tai $x^2 - 2x - 1 = x^2 - 2x + 9$, ir neturi sprendinių. Todėl $x = y$, o tada abi sistemos lygtys virsta ta pačia lygtimi

$$x(x-1)^2 = x^2 - 2x + 9.$$

Šią lygtį paprasčiausia spręsti taip:

$$x(x-1)^2 = (x-1)^2 + 8, \quad x(x-1)^2 - (x-1)^2 = 8,$$
$$(x-1)^2(x-1) = 8, \quad (x-1)^3 = 8,$$
$$x - 1 = 2, \quad x = 3.$$

Taigi turime sprendinį $x = y = 3$.

Antras būdas. Pastebime, kad sistema

$$(x-1)^2 y = (x-1)^2 + 8, \quad (y-1)^2 x = (y-1)^2 + 8$$

supaprastėja, pažymėjus $x - 1 = u$, $y - 1 = v$:

$$u^2(v+1) = u^2 + 8, \quad v^2(u+1) = v^2 + 8,$$

ir tampa tokia:

$$u^2 v = 8, \quad uv^2 = 8. \tag{1}$$

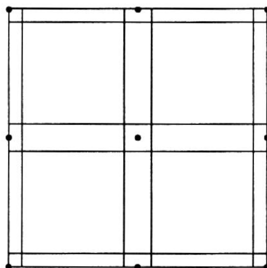
Sudauginę lygtis, randame $u^3 v^3 = 8^2$, $uv = 4$, todėl iš (1) sistemos $u = 2$, $v = 2$, ir $x = y = 3$.

Atsakymas. (3; 3).

114. Žr. 108 uždavinį.

115. Įsivaizduokime, kad 9 taškuose — 4 kvadrato viršūnėse, 4 kraštinių vidurio taškuose ir kvadrato centre — „sukrauta" po 111 taškų. Aišku, kad joks kvadratas $0{,}4 \times 0{,}4$, kurio kraštinės lygiagrečios vienetinio kvadrato kraštinėms, nedengia dviejų „krūvų" (priešingu atveju tokio kvadrato kraštinė būtų ne mažesnė už 0,5).

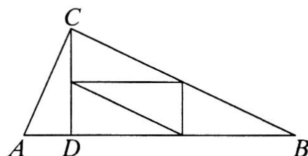
Nedaug kas pasikeičia, jei jokie 2 iš 999 taškų nesutampa, ir visi jie yra vidiniai kvadrato taškai. Padalykime kvadratą tiesėmis, lygiagrečiomis abiems kraštinėms, į juostas, kurių plotis yra 0,05; 0,4; 0,1; 0,4; 0,05 (žr. pav.). Kvadratas bus padalytas į 25 stačiakampes zonas (kai kurios iš jų — kvadratinės).



Nagrinėkime tas 9 zonas, kurioms priklauso minėti 9 taškai. Nė vienas kvadratas $0{,}4 \times 0{,}4$ negali vienu metu dengti dviejų taškų, kurie yra skirtingų zonų vidiniai taškai, — priešingu atveju dengiančiojo kvadrato kraštinė būtų didesnė už 0,4. Dabar užtenka kiekvienoje iš 9 zonų bet kaip išdėstyti po 111 vidinių taškų. Tada nė vienas kvadratas $0{,}4 \times 0{,}4$ negali dengti 112 taškų.

Atsakymas. Ne, nevisada.

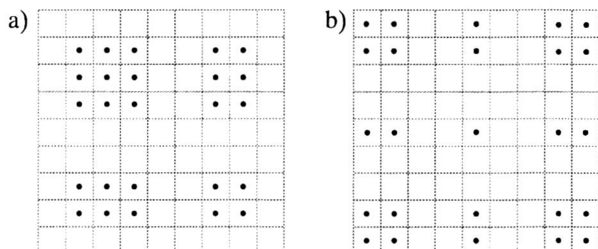
116. Sakykime, kad $CA = \sqrt{5}$, $CB = 2\sqrt{5}$ (žr. pav.). Pagal Pitagoro teoremą randame, kad $AB = 5$. Nuleidžiame aukštinę CD į įžambinę. Kadangi $CA^2 = AD \cdot AB$, tai $AD = 1$. Todėl $DB = 4$. Bet $CD^2 = AD \cdot DB = 1 \cdot 4$, ir $CD = 2$. Trikampio ABC plotas lygus 5, trikampio ACD plotas lygus 1, todėl reikia pamėginti trikampį CDB padalyti į 4 trikampiui ACD lygius trikampius. Tai galima padaryti, išvedus visas 3 jo vidurines linijas (žinoma, stačiakampį galima padalyti į 2 trikampius ir kita įstrižaine).



Beje, nesunku suvokti, kaip bet kurį trikampį padalyti į n^2 (o ne tik į 2^2, kaip kad mums reikėjo) lygių trikampių. Užtenka padalyti kraštines į n lygių atkarpų ir per dalijimo taškus nubrėžti atkarpas, lygiagrečias trikampio kraštinėms.

Atsakymas. Nuleidžiame aukštinę į įžambinę, o didesniajame iš gautų trikampių išvedame visas tris vidurines linijas.

117. *Pirmas būdas.* Įrodysime, kad vabalai gali sutilpti į 25 laukelius. Pasižiūrėkime į a) pav.: kad ir kokį vabalą imsime, jis gali perropoti į vieną iš 25 pažymėtų laukelių.



Dabar įrodysime, kad vabalai negali sutilpti į 24 laukelius. Iš tikrųjų: b) pav. pavaizduoti 25 vabalai, ir jokie du iš jų negali patekti į vieną laukelį. Todėl jau šie 25 vabalai užims 25 laukelius.

Vadinasi, mažiausias užimtų laukelių skaičius yra 25, todėl didžiausias laisvų laukelių skaičius yra $81 - 25 = 56$ laukeliai. Uždavinys išspręstas.

Antras būdas. Įdomu išsiaiškinti: a) kaip gali būti išdėstyti 25 vabalai, kurių jokie 2 negali patekti į vieną laukelį; b) kokia gali būti 25 laukelių sritis, į kurią gali sueiti visi vabalai.

a) Paveikslėlyje c) taškais, nuliukais, pliusais ir minusais laukeliai suskirstyti į 4 sritis. Aišku, kad iš skirtingų sričių negalima patekti į tą patį laukelį. Todėl užtenka išnagrinėti kiekvieną sritį atskirai.

c)

•	o	•	o	•	o	•	o	•
−	+	−	+	−	+	−	+	−
•	o	•	o	•	o	•	o	•
−	+	−	+	−	+	−	+	−
•	o	•	o	•	o	•	o	•
−	+	−	+	−	+	−	+	−
•	o	•	o	•	o	•	o	•
−	+	−	+	−	+	−	+	−
•	o	•	o	•	o	•	o	•

d)

•		•		•
•		•		•
•		•		•

Imkime sritį, pažymėtą taškais. Ją galima pavaizduoti kvadratine 5×5 lentele, nes kiti lentos laukeliai dabar mūsų nedomina (žr. d) pav.). Jei 9×9 lentoje jokie du vabalai (iš 25) negali patekti į vieną laukelį, tai 5×5 lentelėje jokie du vabalai negali būti dviejuose gretimuose laukeliuose. Padalykime lentelę į 9 stačiakampius (ar kvadratus) taip, kaip tat pavaizduota d) paveikslėlyje. Kiekviename stačiakampyje gali būti tik po vieną vabalą, todėl gauname (vienintelį) 9 vabalų, kurių jokie du nėra gretimuose laukeliuose, dėstinį (žr. d) pav.).

Panašiai gauname 6 vabalų dėstinį nuliukų (žr. e) pav.) ir minusų (žr. f) pav.) srityse bei 4 vabalų dėstinį pliusų srityje (g) pav.). Aišku, kad šie dėstiniai nėra vieninteliai.

e)

o		o	
o			o
	o		o

f)

−				−
		−		
				−
−		−		

g)

+		+	
			+
	+		

Sugrąžinę 12–15 brėžinių vabalus į 9×9 lentą, gausime dar vieną iš galimų 25 vabalų, kurių jokie du negali patekti į vieną laukelį, dėstinių (žr. h) pav.). Beje, padalijęs lentą į 3×3 kvadratus (žr. h) pav.), pastebime tokią taisyklę: pastūmus visus 3×3 kvadratus (išskyrus centrinį) kartu su vabalais centro link per du laukelius, visi 25 vabalai bus centriniame 5×5 kvadrate po vieną kiekviename laukelyje. Ši taisyklė galioja visiems kalbamiems 25 vabalų dėstiniams. (Ją nesunku įrodyti atskirai išnagrinėjus 11 brėžinio taškų, nuliukų, pliusų ir minusų sritis, t. y. 12–15 brėžinių lenteles). Įdomu ir tai, kad trečioje ir septintoje horizontalėje (horizontalioje laukelių eilutėje) bei vertikalėje (vertikaliame stulpelyje) negali būti nė vieno iš „reikiamų" 25 vabalų.

h)

•	o			•	o			•
−	+				+			−
				−				
•	o			•			o	•
							+	−
−			+	−				
•			o	•			o	•

i)

	•	•			+	•	•	
	•	•	+			•	•	
			+					
	+	+				+	+	
	•	•	+			•	•	
	•	•	+			•	•	

b) Sakykime, kad visi vabalai suropos į 25 laukelių sritį. Sunumeruokime 9×9 lentos vertikales iš kairės į dešinę. Aišku, kad visi I vertikalės vabalai po švilpuko atsidurs II vertikalėje ir užims mažiausiai 5 laukelius (nes jau 10 arba 16 brėžiniuose 5 vabalai užims skirtingus laukelius). Panašiai II vertikalės vabalai užims iš viso mažiausiai

5 skirtingus laukelius I ir III vertikalėse, V vertikalės — IV ir VI vertikalėse, VI vertikalės — V ir VII vertikalėse, pagaliau, IX vertikalės vabalai užims mažiausiai 5 laukelius VIII vertikalėje. Vadinasi, jau išvardyti vabalai užims I–VIII vertikalėse visus 25 „išskirtus“ laukelius. Todėl IX vertikalėje vabalų nebus. Bet jei taip skaičiuosime iš dešinės į kairę, tai įrodysime, kad ir I vertikalėje vabalų nebus. Tačiau tada III vertikalėje vabalai užims mažiausiai 5 laukelius. Analogiškai VII vertikalėje vabalai užims mažiausiai 5 laukelius.

Dabar jau aišku, kad kiekvienoje iš II, III, VII ir VIII vertikalių bus lygiai 5 užimti laukeliai — jei kurioje nors iš jų būtų daugiau kaip 5, tai iš viso (prijungus IV ir VI vertikalių užimtus laukelius) būtų daugiau kaip 25 laukeliai. Panašiai IV ir VI vertikalėse iš viso bus lygiai 5 užimti laukeliai. Taigi įrodėme, kad ir V vertikalėje vabalų nebus.

Lygiai taip pat vabalų nebus vidurinėje ir kraštinėse horizontalėse.

Imkime b) paveikslėlio vabalus (tą patį gautume ir iš bet kurio vabalų, kurių jokie du negali patekti į vieną laukelį, dėstinio). Šešiolika vabalų, esančių kampuose, galės eiti tik centro link (nes I ir IX vertikalėse vabalų negalės būti).

Taigi vabalai tikrai užims i) paveikslėlio šešiolika laukelių, pažymėtų taškais. Kiti vabalai, eidami bet kur, išskyrus į I ir IX vertikales ir horizontales, užims dar 9 laukelius. Lengva matyti, kad į taip gautus 25 laukelius gali sueiti visi vabalai. Paveikslėlyje i) pavaizduotas dar vienas reikiamos srities pavyzdys (iš keliolikos galimų).

Dabar taip pat gauname įdomią taisyklę: jei visus 25 užimtus laukelius pastumsime centro link palei įstrižainę į gretimą laukelį, tai jie sudarys centrinį 5×5 kvadratą. Ir atvirkščiai, pastūmę centrinio 5×5 kvadrato laukelius nuo centro palei įstrižainę į gretimą laukelį gausime 25 laukelius, į kuriuos gali sueiti visi vabalai.

Atsakymas. 56 laukeliai.

118. Raskime kelis tolesnius sekos narius: $a_3 = \frac{3}{2}$, $a_4 = \frac{1}{2}$, $a_5 = \frac{1}{3}$, $a_6 = \frac{2}{3}$, $a_7 = 2$, $a_8 = 3$. Aišku, kad sekos nariai pradeda kartotis kas šeši. Bet $1989 = 6 \cdot 331 + 3$, todėl $a_{1989} = a_3 = \frac{3}{2}$.

Atsakymas. $a_{1989} = \frac{3}{2}$.

119. Sakykime, kad dviženkliai skaičiai a ir b tenkina sąlygą. Tada keturženklis skaičius $\overline{ab}$ ir $a - b$ yra sveikųjų skaičių kvadratai, t. y. $\overline{ab} = n^2$ arba

$$100a + b = n^2, \tag{1}$$

$$a - b = m^2, \tag{2}$$

$n, m \in Z_0$. Aišku, kad $0 \leqslant m \leqslant 9$ (nes m^2 mažesnis už 100) ir $32 \leqslant n \leqslant 99$ (nes n^2 yra keturženklis skaičius). Dauginame (2) lygtį iš -100 ir pridedame prie (1) lygties: $101b = n^2 - 100m^2$,

$$101b = (n + 10m)(n - 10m). \tag{3}$$

Kadangi 101 yra pirminis skaičius, tai arba $n + 10m$, arba $n - 10m$ dalijasi iš 101. Tačiau $n - 10m \leqslant n \leqslant 99$ ir $n - 10m > 0$, nes (3) lygybės kairė pusė teigiama. Todėl $n - 10m$ nesidalija iš 101. Kadangi skaičius $n + 10m \leqslant 99 + 10 \cdot 9 < 200$ ir dalijasi iš 101, tai $n + 10m = 101$,

$$n = 101 - 10m. \tag{4}$$

Dabar į gautą skaičiaus n išraišką galima įstatyti $m = 1, 2, \ldots, 7$, pakelti kvadratu, gautą keturženklį skelti į du dviženklius skaičius ir patikrinti, ar jų skirtumas yra sveikojo skaičiaus kvadratas. Bet galima daryti ir kiek kitaip.

Iš (3) ir (4) lygčių

$$b = 101 - 20m,$$

ir aišku, kad $1 \leqslant m \leqslant 4$. Iš (2) lygties

$$a = m^2 + b = m^2 - 20m + 101 = (10 - m)^2 + 1.$$

Gautos a, b ir n reikšmės tenkina ir (1) lygtį:

$$\begin{aligned} n^2 &= \big((10-m)10+1\big)^2 = (10-m)^2 100 + (20-2m)10 + 1 = \\ &= \big((10-m)^2+1\big)100 + 101 - 20m = 100a + b. \end{aligned}$$

Be to, gautos a ir b reikšmės yra dviženklės, kai $1 \leqslant m \leqslant 4$, taigi jos tikrai tenkina uždavinio sąlygą.

Kai $m = 1, 2, 3, 4$, gauname keturis sprendinius $(a; b) = (82; 81)$, $(65; 61)$, $(50; 41)$ ir $(37; 21)$.

Pastaba. Sąlygą būtų galima suprasti ir taip, kad antrą skaičių prirašyti prie pirmo galima ir iš kairės. Tada

$$\begin{aligned} 100b + a &= n^2, \\ a - b &= m^2. \end{aligned} \tag{4}$$

Atėmę lygtis vieną iš kitos, gauname

$$\begin{aligned} 101b &= n^2 - m^2, \\ 101b &= (n+m)(n-m). \end{aligned} \tag{5}$$

Vėl $n - m \leqslant 99$ ir nesidalija iš 101. Todėl $n + m \leqslant 99 + 9 < 110$ ir dalijasi iš 101, taigi $n + m = 101$, $n = 101 - m$. Iš (5) lygties $b = n - m = 101 - 2m$. Tada iš (4) lygties $a = m^2 + b = m^2 - 2m + 101 = (m-1)^2 + 100$. Gavome prieštarą, nes a — dviženklis skaičius.

Atsakymas. 37 ir 21; 50 ir 41; 65 ir 61; 82 ir 81.

120. *Pirmas būdas.* Išreikškime y^2 iš antros lygties: $y^2 = -x^2y - 2x$, ir įstatykime į pirmą lygtį. Gauname lygtį

$$-x^3y + x^2 - 2y = 0.$$

(Beje, tą patį gauname padauginę antrą lygtį iš x ir atėmę lygtis vieną iš kitos.) Ji jau pirmo laipsnio lygtis y atžvilgiu: $(x^3 + 2)y = x^2$, ir iš jos nesunku išsireikšti y. Tik neskubėkime dalyti abi puses iš $x^3 + 2$ — pirma reikia išsiaiškinti, ar negali $x^3 + 2$ būti lygus 0. Įrodysime, kad ne. Iš tikrųjų, jei $x^3 + 2 = 0$, tai $x^2 = 0$, tada $x = 0$ ir $0 + 2 = 0$, — prieštara. Taigi $x^3 + 2 \neq 0$, ir

$$y = \frac{x^2}{x^3 + 2}. \tag{1}$$

Įstatome šią išraišką, pavyzdžiui, į antrą lygtį. Tada

$$\frac{x^4}{(x^3+2)^2}+\frac{x^4}{x^3+2}+2x=0. \qquad (2)$$

Norime šią lygtį suprastinti iš x, bet ir vėl neskubėkime. Panagrinėkime, ar gali x būti lygus 0. Pastarąją lygtį ši reikšmė tenkina, vadinasi, $x=0$ yra jos sprendinys. Raskime nelygius nuliui sprendinius. Kadangi $x\neq 0$, prastiname lygtį iš x:

$$\frac{x^3}{(x^3+2)^2}+\frac{x^3}{x^3+2}+2=0.$$

Pažymėkime $x^3=t$ (kuo anksčiau pažymėsime, tuo mažiau rašymo):

$$\frac{t}{(t+2)^2}+\frac{t}{t+2}+2=0, \quad t+t(t+2)+2(t+2)^2=0,$$

$3t^2+11t+8=0$. Kadangi $t=-1$ yra šios lygties sprendinys, tai, remiantis Vijeto teorema, kitas sprendinys yra $t=-\frac{8}{3}$. Grįžę prie x, randame kitus du (2) lygties sprendinius: $x^3=-1\Rightarrow x=-1$ ir $x^3=-\frac{8}{3}\Rightarrow x=-\frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$. Turėdami x reikšmes, iš (1) išraiškos gauname atitinkamas y reikšmes. Kadangi nesirūpinome lygčių ekvivalentumu, tai reikia patikrinti, ar gauti sprendiniai $(0;0)$, $(-1;1)$ ir $(-\frac{2\sqrt[3]{9}}{3};-2\sqrt[3]{3})$ tenkina duotąją sistemą. Lengva įsitikinti, kad visi trys sprendiniai tinka.

Aišku, taip pat galėjome iš pirmos lygties išsireikšti x^2 ir įstatyti į antrą lygtį — būtume gavę tiesinę lygtį x atžvilgiu.

Antras būdas. Jis labai elegantiškas, bet sugalvoti jį sunku. Dauginame pirmą lygtį iš $+2$, o antrą iš $-x$, ir sudedame:

$$xy^2+4x^2-4y-x^3y=0.$$

Kairę pusę pavyksta išskaidyti:

$$xy(y-x^2)+4(x^2-y)=0, \quad (xy-4)(y-x^2)=0.$$

Taigi reikia nagrinėti du atvejus: 1) $xy=4$, 2) $y=x^2$.

1) atveju $y=\frac{4}{x}$, ir pradinės sistemos lygtys virsta ta pačia: $8+3x^3=0$, todėl $x=-\frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$, $y=-2\sqrt[3]{3}$.

2) atveju $y=x^2$, pradinės sistemos lygtys virsta $x^2(x^3+1)=0$ ir $x(x^3+1)=0$, taigi gauname dar du sprendinius $(0;0)$ ir $(-1;1)$.

Trečias būdas. Tai taip pat labai gražus būdas. Atskiriame x^2 ir y^2:

$$\begin{cases} 3x^2=y(2-xy), & (3)\\ y^2=-x(2+xy). & (4)\end{cases}$$

Sudauginame lygtis: $3x^2y^2=-xy(4-x^2y^2)$. Taigi $xy(x^2y^2-3xy-4)=0$,

$$xy(xy+1)(xy-4)=0.$$

Kai $x = 0$, tai (3) ir (4) lygtys virsta ta pačia: $y = 0$.

Kai $y = 0$, tai (3) ir (4) lygtys virsta $x = 0$.

Kai $xy = -1$, tai $y = -\frac{1}{x}$, (3) ir (4) lygtys virsta ta pačia $x^3 = -1$; taigi $x = -1$, $y = 1$.

Kai $xy = 4$, tai $y = \frac{4}{x}$, (3) ir (4) lygtys virsta ta pačia: $3x^3 = -8$; taigi $x = -\frac{2\sqrt[3]{9}}{3}$, $y = -2\sqrt[3]{3}$.

Atsakymas. $(0; 0)$, $(-1; 1)$, $(-\frac{2\sqrt[3]{9}}{3}; -2\sqrt[3]{3})$.

XXXIX OLIMPIADA (1990 m.)

121. Žr. 126 uždavinį.

122. Kadangi $0 > a^2 + ab + ac = \left(a + \frac{b}{2}\right)^2 + \frac{4ac-b^2}{4}$, tai $4ac - b^2 < 0$.

123. Apverskime trupmenas:

$$\frac{xy^2 + 2x + 2y}{x^2y + xy^2} = \frac{5}{3}, \qquad \frac{x^2y + 2x + 2y}{x^2y + xy^2} = \frac{4}{3}.$$

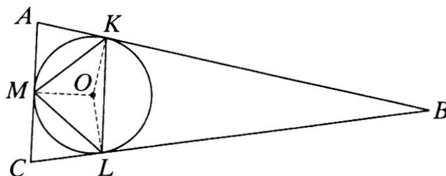
Sudėję lygtis ir pertvarkę gautąją lygtį, gauname $\frac{4x+4y}{x^2y+xy^2} = 2 \Rightarrow xy = 2$. Įstatome šią išraišką į pirmą sistemos lygtį:

$$\frac{2y + 2x + 2y}{2x + 2y} = \frac{5}{3} \Rightarrow \frac{y}{x + y} = \frac{2}{3} \Rightarrow 3y = 2x + 2y \Rightarrow y = 2x.$$

Dabar iš lygties $xy = 2$ nustatome, kad $x^2 = 1$, ir gauname du sprendinius: $(1; 2)$ ir $(-1; -2)$. Juos patikriname.

Atsakymas. $(1; 2)$, $(-1; -2)$.

124. Apskritimo centrą pažymėkime raide O (žr. pav.). Kadangi $\angle OKA = \angle OMA = 90°$, tai $\angle A = 180° - \angle KOM = 180° - 2\angle KLM$ (nes centrinis kampas KOM lygus dvigubam įbrėžtiniam kampui KLM). Taigi $\angle A = 80°$. Lygiai taip pat $\angle C = 80°$, o $\angle B = 20°$.



Atsakymas. $80°$, $80°$, $20°$.

125. 1000 skirtingų mažiausių lyginių skaičių suma $2+4+6+\dots+2000 = 1000\cdot 1001 = 1\,001\,000 > 1\,000\,998$. Taigi duotoje sumoje yra bent vienas nelyginis dėmuo, o kadangi suma lyginė, tai ir bent du dėmenys yra nelyginiai.

126. a) Sudarykime darbo grafiką, kai yra 5 tekintojai ir 3 šlifuotojai. Į pirmą eilutę rašykime, kiek praėjo minučių, į antrą — kiek detalių pradedama šlifuoti tuo momentu, į trečią — kiek yra ištekintų, bet nepradedamų šlifuoti detalių.

5	8	10	11	13	14	15	16	17	18	19	20	21	22
3	2	1	2	1	1	1	1	1	1	1	1	1	1
2	0	4	2	1	0	4	3	2	1	0	4	3	2

Aišku, kad po 13 minučių kiekvieną minutę pradedama šlifuoti 1 detalė. Taigi vienuoliktą detalę pradės šlifuoti po 15 minučių, 121-ą detalę — po 125 minučių. Vadinasi, 5 tekintojai ir 3 šlifuotojai pagamins 121 detalę per $125 + 3 = 128$ minutes.

6 tekintojai ir 3 šlifuotojai pagamins 121 detalę ne greičiau kaip per 128 minutes, nes 120 detalių 3 šlifuotojai šlifuos 120 minučių, 121-ą detalę — dar 3 minutes ir 5 minutes šlifuotojai lauks, kol bus ištekintos pirmos 5 detalės.

5 tekintojai ir 4 šlifuotojai pagamins 121 detalę taip pat tik per 128 minutę, nes 5 tekintojai 120 detalių tekins ne trumpiau kaip 120 minučių, 121-ą detalę — dar 5 minutes, o po to 121-ą detalę 3 minutes šlifuos.

Visais kitais atvejais brigada užtruks ilgiau kaip 128 minutes. Iš tikrųjų, jei bus 4 arba mažiau tekintojų, tai jie 120 detalių ištekins ne greičiau kaip per $120 \cdot \frac{5}{4} = 150$ minučių. O jei bus 2 arba mažiau šlifuotojų, tai jie 120 detalių nušlifuos ne greičiau kaip per $120 \cdot \frac{3}{2} = 180$ minučių.

b) Jei brigadoje bus 5 tekintojai ir 3 šlifuotojai, tai 14-ą detalę pradės šlifuoti po 18 minučių (žr. punkto a) lentelę), todėl 144-ą detalę — po 148 minučių. Taigi 144 detales pagamins per $144 + 3 = 151$ min.

Nagrinėkime dabar brigadą iš 6 tekintojų ir 3 šlifuotojų. Šlifuotojai pradės šlifuoti 3 detales po 5 minučių, kitas 3 — po 8 minučių, o po 10 minučių vėl bus ištekintos 6 detalės. Taigi šlifuotojai dirbs be pertraukos. Vadinasi, $144 = 3 \cdot 48$ detales šlifuotojai nušlifuos per $3 \cdot 48 = 144$ minutes, bet pirmų ištekintų detalių jie lauks 5 minutes. Todėl kalbama brigada pagamins 144 detales per 149 minutes.

Galų gale išnagrinėkime 5 tekintojų ir 4 šlifuotojų brigadą. Sudarome grafiką:

5	8	10	11	13	15	16	18
4	1	3	1	1	3	1	1
1	0	2	1	0	2	1	0

Matome, kad lentelė periodiškai kartojasi, tai yra po $5k$ minučių ($k > 1$) pradedamos šlifuoti 3 detalės, po $5k + 1$ minučių 1 detalė ir po $5k + 3$ — dar 1 detalė. Taigi 14 detalę pradės šlifuoti po 16 minučių, 144-ą detalę — po 146 minučių. Vadinasi, 144 detales brigada pagamins per 149 minutes.

Atsakymas. a) Per 128 minutes; 5 tekintojų ir 3 šlifuotojų brigada arba 6 tekintojų ir 3 šlifuotojų brigada, arba 5 tekintojų ir 4 šlifuotojų brigada. b) Per 149 minutes; 5 tekintojų ir 4 šlifuotojų brigada arba 6 tekintojų ir 3 šlifuotojų brigada.

127. Aišku, kad $a \neq b$, nes kitaip pirma ir antra lygtys sutaptų, todėl antros ir trečios lygčių bendras sprendinys būtų ir visų trijų lygčių sistemos sprendinys. Analogiškai $b \neq c$, $a \neq c$.

Raskime bendrą pirmos ir antros lygčių sprendinį. Iš pirmos lygties atėmę antrą gauname

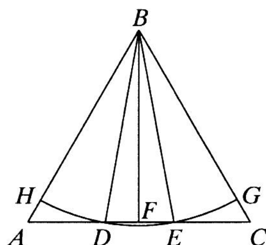
$$(a-b)x=(a-b)c \Rightarrow x=c.$$

Panašiai pirmos ir trečios lygčių bendras sprendinys yra $x=b$. Taigi pirma lygtis turi du skirtingus sprendinius b ir c. Pagal Vijeto teoremą

$$a=-(b+c) \Rightarrow a+b+c=0.$$

128. Sakykime, kad $A_1B_1C_1$ — duotasis trikampis, kurio visos kraštinės mažesnės už $\frac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}$, o kampas B_1 mažiausias (taigi $\angle B_1 < 60^\circ$), ir ABC — lygiakraštis trikampis, kurio kraštinė lygi 1. Trikampį ABC dėsime ant trikampio $A_1B_1C_1$ taip, kad viršūnės B ir B_1 sutaptų.

Brėžkime lanką apskritimo, kurio centras — viršūnė B, o spindulys $BH=BG=BD=BE=\frac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}$ ir nuleiskime statmenį BF į kraštinę AC (žr. pav.). Raskime $\angle DBE$. Turime $\cos\angle DBF=\cos\angle EBF=\frac{BF}{BD}=\sin 60^\circ : \frac{\cos 30^\circ}{\cos 10^\circ}=\cos 10^\circ$, taigi $\angle DBF=\angle EBF 10^\circ$ ir $\angle DBE=\angle ABD=\angle EBC=20^\circ$.



Dabar, jei $\angle B_1 \leqslant 20^\circ$, tai trikampis $A_1B_1C_1$ telpa išpjovoje BFG. Jei $20^\circ \leqslant \angle B \leqslant 60^\circ$, tai trikampį $A_1B_1C_1$ dedame taip, kad kampų ABC ir $A_1B_1C_1$ pusiaukampinės sutaptų. Tada kraštinė B_1A_1 bus išpjovoje DBH, o kraštinė BC_1 — išpjovoje BEG.

129. Kairė pusė lygi $1+\cos 110^\circ+\sin 20^\circ = 1-\sin 20^\circ+\sin 20^\circ = 1$. Kadangi $1990 = 11\cdot 180+10$, tai dešinė pusė taip pat lygi vienetui: $2\cos^2 5^\circ - \cos 10^\circ = 1+\cos 10^\circ-\cos 10^\circ = 1$.

130. *Pirmas būdas.* Aišku, kad dvejeto laipsnis baigiasi lyginiu skaitmeniu, nelygiu nuliui. Padalijęskaičių, kuris baigiasi dviem dvejetais, iš 2, gauname skaičių, kuris baigiasi vienetu. Taigi dvejeto laipsnis negali baigtis dviem dvejetais. Panašiai dvejeto laipsnis negali baigtis dviem šešetais (nes padalytas iš 2 baigtųsi trejetu), trim ketvertais (nes padalytas iš 2 baigtųsi dviem dvejetais) ir keturiais aštuonetais (nes padalytas iš 2 baigtųsi trimis ketvertais). Vadinasi, užtenka nagrinėti tik triženkles dvejeto laipsnių galūnes. Sudarykime lentelę: pirmame stulpelyje rašykime laipsnio rodiklį, antroje dvejeto laipsnio triženklę galūnę.

1	2	11	048	21	152	31	648
2	4	12	096	22	304	32	296
3	8	13	192	23	608	33	592
4	16	14	384	24	216	34	184
5	32	15	768	25	432	35	368
6	64	16	536	26	864	36	736
7	128	17	072	27	728	37	472
8	256	18	144	28	456	38	944
9	512	19	288	29	912	39	888
10	024	20	576	30	824		

Taigi 2^{18} baigiasi dviem ketvertais, 2^{19} — dviem aštuonetais, o 2^{39} — trimis aštuonetais.

Galima ir neskaičiuoti triženklių dvejeto laipsnių galūnių iki 2^{39}. Pavyzdžiui, kadangi 2^2 ir 2^{22} dviženklė galūnė ta pati 04, tai dviženklė galūnė kartojasi kas 20 laipsnių. Taigi iš karto galime ieškoti $2^{39} = 2^{19} \cdot 2^{20} = 2^{22} \cdot 2^{17} = (\ldots 304) \cdot (\ldots 072)$ triženklės galūnės.

Atsakymas. Dviem ketvertais, dviem arba trimis aštuonetais.

131. Tarkime, kad radome reikiamą sprendinį, t. y. pirminius p, q ir natūralųjį n tokius, kad $p + q = (p - q)^n$. Iš karto aišku, kad $p \neq q$. Sakykime, kad rastojo sprendinio $(p; q) = (x; y)$ pirmoji komponentė mažesnė už antrąją, $x < y$. Tada iš lygybės $x + y = (x - y)^n$ matome, kad n lyginis. Bet tada taip pat $y + x = (y - x)^n$, o tai reiškia, kad $(p; q) = (y; x)$ taip pat yra sprendinys, kurio $n > q$. Taigi kiekvieną sprendinį (kai n lyginis), kurio $p < q$, gausime iš sprendinio, kurio $p > q$, pastarąjį apsukę. Todėl užtenka ieškoti sprendinių, kai $p > q$, o jeigu atsirastų sprendinių su lyginiais n, — juos apsukti.

Taigi laikykime, kad $p+q = (p-q)^n$, ir $p > q$. Kadangi pagal sąlygą $p+q = 2q+p-q$ dalijasi iš $p-q$, tai ir $2q$ dalijasi iš $p-q$. Tačiau q yra pirminis skaičius, todėl $2q$ dalikliai yra tik 1, 2, q ir $2q$. Vadinasi, $p-q$ gali būti lygus tik minėtiems dalikliams: $p-q = 1$, 2, q, $2q$.

Kai $p - q = 1$, tai $p + q = 1$, — prieštara.

Kai $p - q = 2$, tai $2q + 2 = 2^n$, $q = 2^{n-1} - 1$, $p = 2^{n-1} + 1$. Jei n — lyginis skaičius, tai $p = 2^{n-1} + 1$ dalijasi iš $2 + 1 = 3$, todėl $p = 3$, $q = 1$, — prieštara. Jei $n = 2k + 1$ nelyginis skaičius, tai $q = 2^{n-1} - 1 = 2^{2k} - 1 = (2^k - 1)(2^k + 1)$, todėl $2^k - 1 = 1$, $k = 1$, $q = 3$, $p = 5$, — tinka.

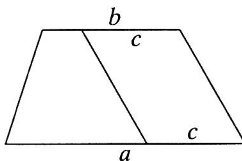
Kai $p - q = q$, tai $p = 2q$, ir p ne pirminis skaičius, — prieštara.

Kai $p - q = 2q$, tai $p = 3q$, — prieštara.

Taigi turime vienintelį sprendinį, kai $p > q$: $(p; q; n) = (5; 3; 3)$. Kadangi čia $n = 3$ nelyginis, tai daugiau sprendinių nėra.

Atsakymas. $(p; q; n) = (5; 3; 3)$.

132. Kadangi abi trapecijos dalys yra keturkampiai, tai tiesė kerta abu pagrindus (žr. pav.). Sakykime, kad lygiagretainio pagrindas lygus c. Pagal sąlygą lygiagretainio plotas lygus pusei trapecijos ploto, o aukštinės lygios, todėl $\frac{a+b}{2} = 2c$, $a + b = 4c$, $a = 4c - b < 4b - b = 3b$, nes $c < b$.



133. Pirmą lygtį pakėlę kvadratu ir atėmę antrą lygtį, gauname $xy = tz - 1$. Pirmą lygtį pakėlę kubu ir atėmę trečią lygtį, turime $3xy(x+y) = 3tz(t+z) - 9 \Rightarrow (tz-1)(t+z) = tz(t+z) - 3 \Rightarrow t + z = 3$. Pakėlę pirmą lygtį ketvirtuoju laipsniu ir atėmę ketvirtą lygtį, gauname $4xy(x^2+y^2) + 6x^2y^2 = 4tz(t^2+z^2) + 6t^2z^2 - 29 \Rightarrow 4(tz-1)(t^2+z^2+2) + 6(tz-1)^2 = 4tz(t^2+z^2) + 6t^2z^2 - 29 \Rightarrow 8tz - 4(t^2+z^2+2) - 12tz + 6 + 29 = 0 \Rightarrow 4(t^2+z^2+2tz-tz) - 27 = 0 \Rightarrow 4(9-tz) - 27 = 0 \Rightarrow 4tz = 9$.

Iš pastarosios lygties ir lygties $t + z = 3$ randame $t = z = \frac{3}{2}$. Tada

$$\begin{cases} x + y = 3, \\ xy = \frac{5}{4} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x = \frac{1}{2}, \\ y = \frac{5}{2} \end{cases} \text{arba} \quad \begin{cases} x = \frac{5}{2}, \\ y = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

Sprendinius patikriname.

Atsakymas. $(\frac{1}{2}; \frac{5}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2})$, $(\frac{5}{2}; \frac{1}{2}; \frac{3}{2}; \frac{3}{2})$.

134. Pagal Vijeto teoremą $x_1 + x_2 = -a$, $x_1x_2 = 1 - b$. Todėl $a^2 + b^2 = x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 + x_1^2x_2^2 - 2x_1x_2 + 1 = x_1^2x_2^2 + x_1^2 + x_2^2 + 1 = (x_1^2+1)(x_2^2+1)$. Bet lygties sprendiniai nelygūs nuliui, kitaip gautume $1 = b$, o tai prieštarauja sąlygai. Todėl gautos sandaugos abu daugikliai didesni už 1, ir $a^2 + b^2$ yra sudėtinis skaičius.

135. Sakykime, kad AD — trikampio ABC pusiaukampinė. Trikampio ABC plotas lygus trikampių ABD ir ACD plotų sumai, taigi $bc \sin A = bd \sin \frac{A}{2} + cd \sin \frac{A}{2}$. Iš duotosios lygybės išplaukia, kad $bc = bd + cd$, vadinasi, $\sin A = \sin \frac{A}{2} \Rightarrow 2 \sin \frac{A}{2} \cdot \cos \frac{A}{2} = \sin \frac{A}{2} \Rightarrow \cos \frac{A}{2} = \frac{1}{2} \Rightarrow \frac{A}{2} = 60^\circ \Rightarrow A = 120^\circ$.

XL OLIMPIADA (1991 m.)

136. Pakeiskime ženklus priešingais visuose kvadratuose 2×2. Aišku, kad kampiniuose kvadrato $n \times n$ laukeliuose ženklai pasikeis vieną kartą, nekampiniuose laukeliuose prie kvadrato $n \times n$ kraštinių — du kartus, o vidiniuose laukeliuose — keturis kartus. Taigi minusų neliks.

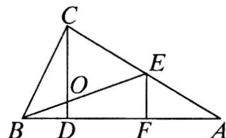
Atsakymas. Gali.

137. Dešinė nelygybė ekvivalenti nelygybei

$$a^2 + b^2 - c^2 - d^2 < 2ab + 2cd \Leftrightarrow (a-b)^2 - (c+d)^2 < 0 \Leftrightarrow$$
$$(a - b + c + d)(a - b - c - d) < 0.$$

Pastarosios nelygybės kairės pusės dauginamasis teigiamas, o daugiklis neigiamas, nes keturkampio trijų kraštinių suma didesnė už ketvirtą kraštinę (sakykime, $AB + BC + CD > AC + CD > AD$, jei $ABCD$ — keturkampis). Lygiai taip pat įrodome kairę nelygybę.

138. *Pirmas būdas.* Brėžiame $EF \parallel CD$ (žr. pav.). Kadangi $CE = EA$, tai $DF = FA$. Kita vertus, $BD : a = a : AB$ (nes trikampiai BDC ir BCA panašūs), $BD = \frac{a^2}{AB}$. Lygiai taip pat $DA = \frac{b^2}{AB}$, ir $BO : OE = BD : DF = 2BD : DA = 2a^2 : b^2$.



Antras būdas. Sakykime, kad taškuose A, B ir C atitinkamai yra svoriai a^2, b^2 ir a^2. Tada du svorius taškuose B ir A atstoja svoris $a^2 + b^2$ taške D (nes $BD \cdot b^2 = DA \cdot a^2$), o du svorius taškuose A ir C — svoris $2a^2$ taške E. Todėl visus tris svorius taškuose A, B, C atstoja svoris $2a^2 + b^2$ atkarpų BE ir CD susikirtimo taške 0. Vadinasi, $BO : OE = 2a^2 : b^2$.

Atsakymas. $2a^2 : b^2$ (imant nuo viršūnės B).

139. Į pirmą eilutę rašykime skaičius, kurie lygūs ketvertų ($= 2^2$) sumai, į antrą — vieno devyneto (3^2) ir ketvertų sumai, į trečią — dviejų devynetų ir ketvertų sumai, į ketvirtą — trijų devynetų ir ketvertų sumai (didesnių už 27 skaičių neberašome — dedame daugtaškį):

$$
\begin{array}{llllll}
 & & 8, & 12, & 16, & 20, \; 24, \; \ldots \\
 & 13, & 17, & 21, & 25, & \ldots \\
18, & 22, & 26, & \ldots & & \\
27, & \ldots & & & &
\end{array}
$$

Kadangi lentelėje turime 24, 25, 26 ir 27, tai pridėdami po ketvertą gausime ir visus natūraliuosius skaičius, didesnius už 23. Kita vertus, visus ieškomuosius skaičius, mažesnius už 24, jau surašėme (nes jei į sumą imsime daugiau kaip du devynetus arba bent vieną pirminio skaičiaus, didesnio už tris, kvadratą, tai gausime skaičių, didesnį už 24).

Beje, įrodėme, kad ieškomuosius skaičius galima išreikšti tik ketvertų ir devynetų sumomis.

Atsakymas. $8, 12, 13, 16, 17, 18, 20, 21, 22$ ir visus natūraliuosius skaičius, didesnius už 23.

140. Eliminuojame kintamąjį z. Pirmą lygtį padauginę iš 2, antrą — iš 3 ir sudėję lygtis, gauname $3x^2 + 2x + 4y^2 - 9y = 61$,

$$3x^2 + 2x + 4y^2 - 9y + 6 = 67. \tag{1}$$

Kadangi $3x^2 + 2x > 0$ ir $4y^2 - 9y + 6 > 0$ (nes diskriminantas neigiamas) su visais natūraliaisiais x ir y, tai iš (1) lygties gauname, kad $3x^2+2x < 67$, $4y^2-9y+6 < 67$. Bet $3x^2+2x \geqslant 3{\cdot}25+2{\cdot}5 > 67$, kai $x \geqslant 5$, o $4y^2-9y+6 = y(4y-9)+6 \geqslant 6{\cdot}(4{\cdot}6-9)+6 > 67$, kai $y \geqslant 6$. Todėl užtenka patikrinti reikšmes $x = 1, 2, 3, 4$, tada $3x^2+2x = 5$, 16, $\underline{33}$, 56, ir $y = 1, 2, 3, 4, 5$, tada $4y^2 - 9y + 6 = 1$, 4, 15, $\underline{34}$, 61. Pastebime, kad sumą 67 galima sudaryti tik iš pabrauktų skaičių, t. y. tinka tik $x = 3$, $y = 4$. Tada iš sistemos gauname $z = 6$.

Atsakymas. (3; 4; 6).

141. *Pirmas būdas.* Visų pirma įrodysime, kad

$$a^b + b^c > abc, \qquad (1)$$

kai $\{b = 2, c \geqslant 5\}$ arba $\{a = 1, b \geqslant 2, c \geqslant 5\}$ arba $\{a \geqslant 2, b \geqslant 3\}$. Iš tikrųjų, pagal aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybę $a^b + b^c \geqslant \sqrt{a^b b^c}$, todėl užtenka įrodyti nelygybę $2\sqrt{a^b b^c} > abc \Leftrightarrow$

$$4a^{b-2}b^{c-2} > c^2. \qquad (2)$$

Kai $a^{b-2} \geqslant 2$, t. y. $\{a \geqslant 2, b \geqslant 3\}$, tai (2) nelygybė teisinga su visais c. Iš tikrųjų, $8b^{c-2} > c^2$, kai $c = 1, 2, 3$ (primename, kad $b \geqslant 2$). Jei nelygybė $8b^{k-2} > k^2$ su tam tikru $k \geqslant 3$, tai $8b^{(k+1)-2} = 8b^{k-2} \cdot b > k^2 \cdot b > k^2 \cdot \left(\frac{k+1}{k}\right)^2 = (k+1)^2$, nes $b \geqslant 2 > \frac{(k+1)^2}{k^2}$, kai $k \geqslant 3$. Taigi teisinga ir nelygybė $8b^{(k+1)-2} > (k+1)^2$. Remiantis matematinės indukcijos principu (2) nelygybė įrodyta (kai $a^{b-2} \geqslant 2$).

Kai $a^{b-2} = 1$, t. y. $a = 1$ arba $b = 2$, tai (2) nelygybė virsta $4b^{c-2} > c^2$, kuri teisinga, kai $c \geqslant 5$ ir $b \geqslant 2$ (įrodome tuo pačiu matematinės indukcijos metodu).

Dabar reikia patikrinti atvejus: $b = 1$; $\{b = 2, c \leqslant 4\}$; $\{a = 1, b \geqslant 2, c \leqslant 4\}$. Kai $b = 1$, tai lygtis virsta tokia: $a + 1 = ac$, $1 = a(c-1)$, $a = 1$, $c = 2$. Gavome sprendinį $(1; 1; 2)$.

Kai $\{b = 2, c \leqslant 4\}$, tai turime lygtį $a^2 + 2^c = 2ac$, $a = c \pm \sqrt{c^2 - 2^c}$. Patikrinę $c = 1, 2, 3, 4$, gauname sprendinius $(2; 2; 2)$, $(2; 2; 3)$, $(4; 2; 3)$, $(4; 2; 4)$.

Kai $\{a = 1, b \geqslant 2, c \leqslant 4\}$, gauname lygtį $1 + b^c = bc$, $1 = b(c - b^{c-1})$, — prieštara, nes $b \geqslant 2$.

Antras būdas. Kaip ir I būdu įrodome (1) nelygybę, kai $b \geqslant 2$ ir $c \geqslant 5$. Patikriname atvejį $b = 1$. Toliau galima samprotauti taip. Iš lygties išplaukia, kad a^b dalijasi iš b.

Įrodykime tokį teiginį: „Jei m ir n — natūralieji skaičiai ir m^n dalijasi iš n, tai m^n dalijasi iš mn“. Iš tikrųjų, sakykime, kad p yra skaičiaus n pirminis daliklis ir $n \vdots p^r$ (r — natūralusis skaičius). Aišku, kad $m \vdots p$, todėl $m^r \vdots p^r$. Bet $n \geqslant p^r > r$ (nelygybę $p^r > r$ įrodome lygiai taip pat kaip (2) nelygybę), todėl $m^{n-1} \vdots p^r$. Įrodėme, kad jei $n \vdots p^r$, tai ir $m^{n-1} \vdots p^r$, koks bebūtų skaičiaus n pirminis daliklis p ir laipsnis r. Iš čia ir išplaukia, kad $m^{n-1} \vdots n$, o tada $m \cdot m^{n-1}$ iš $m \cdot n$.

Vadinasi, $a^b \vdots ab$. Tačiau tada $b^c \vdots ab$, todėl

$$\frac{a^b}{ab} + \frac{b^c}{ab} = c,$$

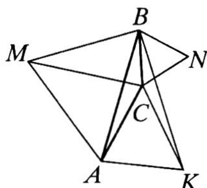
ir kairėje pusėje abu dėmenys — natūralieji skaičiai. Dabar užtenka perrinkti atvejus, kai kairės pusės dėmenys aitinkamai lygūs 1 ir 1 (tada $c = 2$); 1, 2 arba 2, 1 ($c = 3$); 1, 3 arba 2, 2 arba 3, 1 ($c = 4$).

Atsakymas. $(1; 1; 2)$, $(2; 2; 2)$, $(2; 2; 3)$, $(4; 2; 3)$, $(4; 2; 4)$.

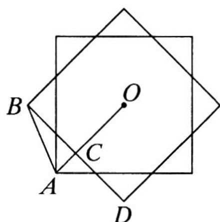
142. Apibrėžimo srityje $\{x \neq 0, y \neq 0\}$ duotoji lygybė ekvivalenti $(x+y)+1 = xy$, taigi $x+y \neq -1$. Pažymėję $t = x+y$, gauname lygybę $t+1 = x(t-x) \Leftrightarrow x^2 - tx + t + 1 = 0$. Aišku, kad t gali įgyti tas ir tik tas reikšmes (išskyrus -1), su kuriomis trinaris turi šaknų, t. y. kai diskriminantas neneigiamas. Taigi $t^2 - 4t - 4 \geqslant 0 \Leftrightarrow t \geqslant 2+2\sqrt{2}$ arba $t \leqslant 2-2\sqrt{2}$. Išmetame reikšmę $t = -1$.

Atsakymas. $t \in (-\infty; -1) \cup (-1; 2-2\sqrt{2}] \cup [2+2\sqrt{2}; +\infty)$.

143. Nagrinėkime du smailiuosius trikampio ABC kampus (žr. pav.), sakykime, A ir B. Tada $\triangle AMC = \triangle ABK$ (nes $AM = AB$, $AC = AK$, kaip atitinkamų lygiakraščių trikampių kraštinės, o $\angle CAM = \angle A + 60^\circ = \angle KAB$), todėl $MC = BK$ (arba taip: trikampį AMC pasukę 60° kampu apie viršūnę A, gausime trikampį ABK, todėl $MC = BK$). Lygiai taip pat įrodome, kad $MC = NA$.



144. *Pirmas būdas.* Išsprendę kvadratinę lygtį, gauname $\operatorname{tg} x = -1 \pm \sqrt{2}$. Statųjį trikampį, kurio statiniai lygūs 1 ir $\sqrt{2} - 1$, galima gauti taip: pasukime kvadratą, kurio kraštinė lygi 2, 45° kampu apie jo centrą O (žr. pav.).



Tada $\angle ACB = 90^\circ$, $AC = \sqrt{2} - 1$, $BC = 1$, taigi $\operatorname{tg} \angle ABC = \sqrt{2} - 1$. Bet visos 8 kvadratų viršūnės yra viename apskritime, kurio centras O. Todėl $\angle ABD = \frac{\angle AOD}{2} = \frac{45^\circ}{2}$.

Antras būdas. Nagrinėkime smailųjį kampą x, kurio $\operatorname{tg} x = \sqrt{2} - 1$. Aišku, kad $0^\circ < x < 45^\circ$. Tada $\operatorname{tg} 2x = \frac{2 \operatorname{tg}}{1 - \operatorname{tg}^2 x} = \frac{2(\sqrt{2}-1)}{1-(\sqrt{2}-1)^2} = 1$, ir $0^\circ < 2x < 90^\circ$. Taigi $2x = 45^\circ$, $x = 22{,}5^\circ$.

Trečias būdas. Duotoji lygtis ekvivalenti (nes $\cos x \neq 0$) lygčiai $\sin x \sin x + 2 \sin x \cos x = \cos x \cos x \Leftrightarrow \sin 2x = \cos 2x \Leftrightarrow \operatorname{tg} 2x = 1 \Leftrightarrow 2x = 180^\circ \cdot n + 45^\circ \Leftrightarrow x = 90^\circ n + 22{,}5^\circ$. Taigi visi lygties sprendiniai racionalūs.

Atsakymas. Taip (lygties sprendiniai yra $90^\circ n + 22{,}5^\circ$, $n \in \mathbf{Z}$).

145. Žr. 136 uždavinį.

146. Imkime didžiausią iš skaičių x, y, z, t, sakykime, z. Tada dešinė lygties pusė ne didesnė už $4z!$, taigi $u! \leqslant 4z!$. Bet $u > z$, todėl $4 \geqslant \frac{u!}{z!} \geqslant u$. Kita vertus, $u! \geqslant 4$, taigi $u \geqslant 3$. Kai $u = 3$, tai $3! = 6 = 1! + 2! + 2!$, todėl du iš skaičių x, y, z, t lygūs 1, o kiti du lygūs 2, — gauname 6 sprendinius. Kai $u = 4$, tai $4! = 24 + 6 + 6 + 6 + 6 = 3! + 3! + 3! + 3!$ (jei bent vienas iš x, y, z, t mažesnis už 3, tai dešinė pusė bus mažesnė už $4 \cdot 6 = 24$) ir gauname dar vieną sprendinį (3; 3; 3; 3).

Atsakymas. (1; 1; 2; 2), (1; 2; 1; 2), (1; 2; 2; 1), (2; 1; 1; 2), (2; 1; 2; 1), (2; 2; 1; 1), (3; 3; 3; 3).

147. *Pirmas būdas.* Kadangi $x(x^4 - x^2 + 1) = x\left(\left(x^2 - \frac{1}{2}\right)^2 + \frac{3}{4}\right) = 2$, tai $x > 0$. Be to, $x \neq 1$. Remkimės teigiamų skaičių aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe. Viena

vertus, kadangi $x^5 \neq x$, tai $2 = (x^5+x)-x^3 > 2\sqrt{x^5 \cdot x}-x^3 = x^3$, todėl $x < \sqrt[3]{2} = \sqrt[6]{4}$. Kita vertus, padauginę duotąją lygybę iš x^2+1, gauname $x(x^2+1)(x^4-x^2+1) = x(x^6+1) = 2(x^2+1) > 2 \cdot 2\sqrt{x^2 \cdot 1} = 4x$, todėl $x^6+1 > 4$, $x^6 > 3$, $x > \sqrt[6]{3}$.

Antras būdas. Kai $0 < y \leqslant 1$, tai $y^5 - y^3 + y = y^3(y^2-1)+y \leqslant y \leqslant 1$, todėl duotasis skaičius $x > 1$. Kai $y > 1$, tai funkcija $f(y) = y^5-y^3+y = y^3(y^2-1)+y$ didėja. Todėl užtenka įrodyti, kad $f(\sqrt[6]{3}) < 2 < f(\sqrt[6]{4})$. Kadangi $f(y) = \frac{y(y^6+1)}{y^2+1} < \frac{y(y^6+1)}{2\sqrt{y^2 \cdot 1}} = \frac{y^6+1}{2}$, kai $y > 1$, tai $f(\sqrt[6]{3}) < \frac{3+1}{2} = 2$. Kita vertus, $f(y) = y^5+y-y^3 > 2\sqrt{y^5 \cdot y} - y^3 = y^3$, kai $y > 1$, todėl $f(\sqrt[6]{4}) > (\sqrt[6]{4})^3 = 2$.

Trečias būdas. Pirmas ir antras būdai remiasi tomis pačiomis idėjomis. Įdomu, kad įmanoma paprasčiausiai viską suskaičiuoti (ir net be skaičiuoklio).

Kadangi $1{,}5^3 = 2{,}25 \cdot 1{,}5 < 2{,}5 \cdot 1{,}5 = 2^2 - 0{,}5^2 < 4$, tai $\sqrt[6]{4} > \sqrt{1{,}5}$. Funkcija $f(y) = y(y^4-y^2+1) = y^3(y^2-1)+y$ didėja, kai $y > 1$. Kadangi $f(\sqrt{1{,}5}) = \sqrt{1{,}5}(1{,}5^2-1{,}5+1) = 1{,}75\sqrt{1{,}5} > 1{,}7 \cdot 1{,}2 > 2$, o $f(x) = 2$, tai $x < \sqrt{1{,}5} < \sqrt[6]{4}$. Kiek sunkiau su kita nelygybe. Imti $\sqrt{1{,}4}$ negana: $\sqrt{1{,}4} < \sqrt[6]{3}$, nes $1{,}4^3 = 1{,}96 \cdot 1{,}4 < 2 \cdot 1{,}4 < 3$. O štai imti $\sqrt{1{,}45}$ jau užtenka: $\sqrt{1{,}45} > \sqrt[6]{3}$, nes $1{,}45^3 > 3$. Kadangi $f(\sqrt{1{,}45}) = \sqrt{1{,}45}(1{,}45^2 - 1{,}45 + 1) < 2$, o $f(x) = 2$, tai $x > \sqrt{1{,}45} > \sqrt[6]{3}$.

148. Tiesinis dvinaris $ax+b$ (pagal sąlygą $a \neq 0$) netinka, nes jo išvestinė lygi konstantai a, o pats dvinaris įgyja visas realiąsias reikšmes. Imkime kvadratinį trinarį ax^2+bx+c. Kadangi jo išvestinė yra tiesinis dvinaris $2ax+b$, tai koeficientas a turi būti teigiamas, ir gauname nelygybę

$$ax^2+bx+c > 1991(2ax+b) \Leftrightarrow ax^2+(b-3982a)x+c-1991b > 0. \qquad (1)$$

Aišku, kad nekeičiant a ir b, galima parinkti tokį (didelį) c, kad (1) nelygybės kairės pusės kvadratinis trinario diskriminantas būtų neigiamas, o tada (1) nelygybė bus teisinga su visais x (kai $a > 0$). Taigi kvadratinis trinaris, tenkinantis uždavinio sąlygas, tikrai egzistuoja.

Beje, panašiai galima įrodyti, kad nėra nelyginio laipsnio daugianario, tenkinančio uždavinio sąlygas, o bet kurio lyginio laipsnio daugianario su teigiamuoju vyriausiuoju koeficientu laisvąjį narį galima taip pakeisti, kad gautas daugianaris tenkintų uždavinio sąlygą. Siūlome skaitytojui pačiam tuo įsitikinti.

Žinoma, galima nurodyti konkretų daugianario pavyzdį, pavyzdžiui, x^2+1991^2. Tada $x^2+1991^2 \geqslant 1991 \cdot 2x \Leftrightarrow (x-1991)^2 \geqslant 0$.

Atsakymas. Taip, yra, pavyzdžiui, x^2+1991^2.

149. Surašykime aibės A skaičius didėjimo tvarka: $a_1 < a_2 < a_3 < \dots < a_n < \dots$. Tada $a_n - a_{n-1} > \frac{a_n a_{n-1}}{11} \Rightarrow a_n(1-\frac{a_{n-1}}{11}) > a_{n-1} \Rightarrow a_{n-1} < 11, a_n > \frac{11a_{n-1}}{11-a_{n-1}}$. Beje, įrodėme, kad visi aibės A skaičiai, išskyrus gal būt didžiausią, mažesni už 11. Kadangi $\frac{11x}{11-x} = \frac{121}{11-x} - 11$ yra didėjanti funkcija, kai $1 \leqslant x \leqslant 10$, tai iš nelygybės $a_{n-1} > a$ (kai

$1 \leqslant a \leqslant 10$) išplaukia nelygybė $a_n > \frac{11a}{11-a}$. Paeiliui gauname (a_n — natūralieji skaičiai):

$$\begin{aligned} &a_1 \geqslant 1,\\ &a_2 > 11 \cdot \frac{1}{11-1} = \frac{11}{10} \Rightarrow a_2 \geqslant 2,\\ &a_3 > 11 \cdot \frac{2}{11-2} = \frac{22}{9} \Rightarrow a_3 \geqslant 3,\\ &a_4 > 11 \cdot \frac{3}{11-3} = \frac{33}{8} \Rightarrow a_4 \geqslant 5,\\ &a_5 > 11 \cdot \frac{5}{11-5} = \frac{55}{6} \Rightarrow a_5 \geqslant 10,\\ &a_6 > 11 \cdot \frac{10}{11-10} = 110 \Rightarrow a_6 \geqslant 111. \end{aligned}$$

Juo labiau $a_6 \geqslant 11$, ir daugiau aibėje elementų būti negali. Kita vertus, aibė iš šešių skaičių $\{1, 2, 3, 5, 10, 111\}$ tikrai tenkina sąlygą (nesunku patikrinti nelygybę gretimiems nariams; tada negretimiems nariams ji juo labiau teisinga: $a_n - a_{n-k} \geqslant a_n - a_{n-1} > \frac{a_n a_{n-1}}{11} \geqslant \frac{a_n a_{n-k}}{11}$).

Atsakymas. Šeši.

150. Padaliję kiekvieną trikampio kraštinę į 10 lygių dalių ir sujungę dalijimo taškus atkarpomis, lygiagrečiomis trikampio kraštinėms, gausime 100 lygių trikampiukų, panašių į duotąjį trikampį. Įbrėžtų į tuos trikampiukus skrituliukų plotų suma lygi įbrėžto į trikampį skritulio plotui. Jei trikampio visos kraštinės skirtingos, tai skrituliukai neturi bendrų taškų (įrodykite!), todėl visus juos galima šiek tiek padidinti ir galbūt taip pastumti, kad jie visi tilptų trikampyje, nesikirstų ir būtų lygūs. Jei tik dvi trikampio kraštinės lygios, tai skrituliukai arba neturi bendrų taškų, arba liečiasi, bet kiekviena pora besiliečiančių skrituliukų neturi bendrų taškų su kitais skrituliukais. Todėl ir dabar skrituliukus galima šiek tiek padidinti.

Į lygiakraštį trikampį (lygius) skrituliukus brėžiame taip: 14 skrituliukų liečia trikampio pagrindą paeiliui vienas kitą, o kraštiniai — po šoninę kraštinę, antroje eilėje 13 skrituliukų paeiliui liečia vienas kitą, kiekvienas — po 2 pirmos eilės skrituliukus ir t. t. Iš viso gausime $14+13+12+\dots+1 = 105$ skrituliukus. Jei r — skrituliuko spindulys, o trikampio kraštinė lygi 1, tai nesunku įsitikinti, kad $13 \cdot 2r + 2r\sqrt{3} = 1$, $r = \frac{1}{26+2\sqrt{3}}$. Įbrėžto į trikampį skritulio spindulys lygus $\frac{\sqrt{3}}{6}$. Turime: $100 \cdot \left(\frac{1}{26+2\sqrt{3}}\right)^2 > \left(\frac{\sqrt{3}}{6}\right)^2 \Leftrightarrow 300 > (13+\sqrt{3})^2$. Pastaroji nelygybė akivaizdi. Taigi 100 skrituliukų plotų suma didesnė už įbrėžto į trikampį skritulio plotą. Dabar jau reikia skrituliukus šiek tiek sumažinti, kad jie neturėtų bendrų taškų.

Šiaipgi uždavinio sąlygą galima suprasti ir taip: ar egzistuoja trikampis, kuriame telpa 100 nesikertančių lygių skritulių, kurių plotų suma didesnė už įbrėžto į trikampį skritulio plotą? Šį uždavinį lengviausia spręsti taip: nubrėžiame 100 lygių nesikertančių skritulių, kurių centrai yra vienoje tiesėje, ir apie visus juos apibrėžiame statųjį (ar lygiašonį) trikampį su labai mažu smailiuoju kampu. Tada įbrėžtas į trikampį skritulys bus beveik toks pat, kaip ir bet kuris iš 100 skritulių.

Atsakymas. Gali.

151. Išskaidome abi puses: $xyz(x + 4y + 16z) = 11 \cdot 181$ (nesunku įsitikinti, kad 181 — pirminis skaičius). Taigi xyz gali būti lygus tik $\pm 1, \pm 11, \pm 181, \pm 11 \cdot 181$. Tada $x + 4y + 16z$ atitinkamai lygus $\pm 1991, \pm 181, \pm 11, \pm 1$.

Jei $xyz = \pm 1$, tai $|x| = |y| = |z| = 1$, todėl $|x+4y+16z| \leqslant |x|+4|y|+16|z| = 21 < 1991$, — prieštara.

Jei $xyz = \pm 11$, tai reikia imti $z = \pm 11$ (nes kitaip $|x+4y+16z| < 1+4\cdot 11+16 < 181$). Tada $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $\pm 1 \pm 4 \pm 176 = \pm 181$ ir tinka tik du sprendiniai $(1; 1; 11)$ ir $(-1; -1; -11)$.

Jei $xyz = \pm 181$, tai $|x + 4y + 16z| > 181 - 4 \cdot 1 - 16 \cdot 1 > 11$, — netinka.

Sunkiau pastebėti sprendinį, kai $xyz = \pm 11 \cdot 181$. Tačiau iš jau turėtos lygybės $1 + 4 + 16 \cdot 11 = 181$ gauname $181 - 4 \cdot 1 - 16 \cdot 11 = 1$. Taigi reikia imti $x = \pm 181$ (jei $|x| = 181 \cdot 11$ arba $|y| \geqslant 181$, arba $|z| \geqslant 181$, tai $|x + 4y + 16z| > 1$) ir gauname dar du sprendinius $(181; -1; -11)$ ir $(-181; 1; 11)$.

Atsakymas. $(1; 1; 11)$, $(-1; -1; -11)$, $(181; -1; -11)$, $(-181; 1; 11)$.

152. Netinka $1 + 2 = 3$, $3 + 3 = 6$, $6 + 4 = 10$, $10 + 5 = 15$, $15 + 6 = 21$, $21 + 7 = 28$, o $28 + 8 = 1 + 2 + 3 + 4 + 5 + 6 + 7 + 8 = 36 = 6^2$ tinka.

Beje, reikiamų sumų yra be galo daug. Iš tikrųjų, jei $1+2+\cdots+n = \frac{n(n+1)}{2}$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas ($n \in N$), tai ir $1+2+\cdots+[(2n+1)^2-1] = [(2n+1)^2-1]\cdot\frac{[(2n+1)^2]}{2} = (2n + 1)^2 \cdot 4 \cdot \frac{n(n+1)}{2}$ yra sveikojo skaičiaus kvadratas (ir $(2n + 1)^2 - 1 > n$).

Atsakymas. Taip, gali; pavyzdžiui, $1 + 2 + \cdots + 8 = 6^2$.

153. Prie pirmos lygties pridedame antrą lygtį, padaugintą iš $\pm\sqrt{3}$. Gauname $x^3 \pm 3k^2(y\sqrt{3}) + 3x(y\sqrt{3})^2 \pm (y\sqrt{3})^3 = 2 \pm \sqrt{3} \Leftrightarrow (x \pm y\sqrt{3})^3 = 2 \pm \sqrt{3}$. Sudauginę lygtis $(x + y\sqrt{3})^3 = 2 + \sqrt{3}$ ir $(x - y\sqrt{3})^3 = 2 - \sqrt{3}$, turime $(x^2 - 3y^2)^3 = 1 \Leftrightarrow x^2 - 3y^2 = 1$.

Žinoma, buvo galima rasti ir sistemos sprendinį:

$$\begin{cases} x + y\sqrt{3} = \sqrt[3]{2 + \sqrt{3}}, \\ x - y\sqrt{3} = \sqrt[3]{2 - \sqrt{3}}; \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x = \dfrac{\sqrt[3]{2+\sqrt{3}} + \sqrt[3]{2-\sqrt{3}}}{2}, \\ y = \dfrac{\sqrt{2+\sqrt{3}} - \sqrt{2-\sqrt{3}}}{2\sqrt{3}}. \end{cases}$$

Nesunku patikrinti, kad jis tenkina lygtį $x^2 - 3y^2 = 1$.

154. Sakykime, kad O — iškilojo keturkampio $ABCD$ įstrižainių kirtimosi taškas. Pažymėkime $x = AO$, $y = BO$, $z = CO$, $q = DO$, $\alpha = \angle AOB = \angle COD$. Tada $\angle BOC = \angle COD = \pi - \alpha$, ir pagal kosinusų teoremą gauname $AB^2 + CD^2 = BC^2+DA^2 \Leftrightarrow x^2+y^2+z^2+q^2-2(xy+zq)\cos\alpha = x^2+y^2+z^2+q^2+2(yz+qx)\cos\alpha \Leftrightarrow (xy + yz + zq + qx)\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow (x + z)(y + q)\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow AC \cdot BD\cos\alpha = 0 \Leftrightarrow \cos\alpha = 0$.

Neiškilojo keturkampio viršūnes taip pažymėkime paeiliui A, B, C, D, kad AC būtų išorinė įstrižainė, o vidaus kampas D būtų didesnis už 180°. Pažymėję tiesių BD ir AC kirtimosi tašką 0, $\alpha = \angle AOB$, $x = OA$, $y = OB$, $z = OC$, bet $q = -OD$, gausime tą pačią ekvivalenčių lygybių seką.

155. a) Kadangi $8 \times 11 = 88 = 14 \cdot 6 + 4$, tai daugiau kaip 14 juostelių iškirpti negalima. Kita vertus, 14 juostelių iškirpti galima (žr. a) pav., stačiakampius $6 \cdot 2$ ir $6 \cdot 5$ dalijame į 2 ir 5 juostas).

a)

b)

1	2	3	4	5	6	1	2	3
2	3	4	5	6	1	2	3	4
3	4	5	6	1	2	3	4	5
4	5	6	1	2	3	4	5	6
5	6	1	2	3	4	5	6	1
6	1	2	3	4	5	6	1	2
1	2	3	4	5	6	1	2	3
2	3	4	5	6	1	2	3	4

b) Stačiakampį 8×9 galima padalyti į stačiakampius 8×6, 3×6 ir 3×2. Todėl $8 + 3 = 11$ juostų iškirpti galima. Įrodysime, kad 12 juostų negalima gauti. Paveikslėlyje b) stačiakampis padalytas į 72 vienetinius laukelius, ir laukeliuose parašyti paeiliui stulpeliuose ir eilutėse skaičiai $1, 2, 3, 4, 5, 6$. Visame stačiakampyje yra po 12 vienetų ir ketvertų, po 13 dvejetų ir trejetų, ir tik po 11 penketų ir šešetų. Aišku, kad kiekvienoje juostoje 1×6 yra visi skaičiai $1, 2, 3, 4, 5$ ir 6 po 1 kartą.

Bet kaip iškirpus 11 juostų, likusioje stačiakampio dalyje bus 1, 2, du 3 ir du 4, bet nebus 5 ir 6. Taigi likusioji dalis nebus juosta 1×6.

Atsakymas. a) 14; b) 11.

156. Pirmoje lygtyje y^2 pakeitę į $2x$, gauname $(x-2a-1)^2+2x = (a+1)^2 \Leftrightarrow x^2-4ax+3a^2+2a = 0$. Aišku, kad sistema turės keturis sprendinius tada ir tik tada, kai pastaroji lygtis turės du (skirtingus) teigiamus sprendinius, tai yra kai (pagal Vijeto teoremą) $4a > 0$, $3a^2+2a > 0$ ir $D = (2a)^2 - 3a^2 - 2a > 0$. Taigi $\{a > 0, a^2 - 2a > 0\} \Leftrightarrow a > 2$.

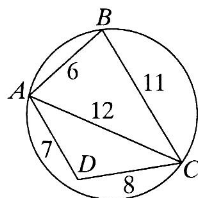
Atsakymas. $a > 2$.

157. Kai $m = 1$, tai yra be galo daug sprendinių $(k; m; n) = (t; 1; 2^t + 1)$, $t \in N$. Sakykime, kad m — nelyginis skaičius, didesnis už 1. Pertvarkome duotąją lygtį $2^k = n^m - 1 \Leftrightarrow 2k = (n-1)(n^{m-1}+n^{m-2}+\cdots+n+1)$. Pastarosios lygties dešinės pusės antras daugiklis yra nelyginis skaičius, didesnis už 1 (kai n — lyginis skaičius, tai akivaizdu, o kai n — nelyginis skaičius, tai antro daugiklio visi dėmenys — nelyginiai skaičiai ir dėmenų yra nelyginis skaičius, būtent m). Bet skaičiaus 2^k visi daugikliai, išskyrus 1, yra lyginiai skaičiai, ir gavome prieštarą.

Kai m lyginis skaičius, sakykime, $m = 2s$, tai $2^k = (n^s - 1)(n^s + 1)$, ir dvejetu besiskiriantys skaičiai $n^s - 1$ bei $n^s + 1$ yra dvejeto laipsniai. Aišku, kad jie lygūs 2 ir 4 (nes $\{n^s - 1 = 2^q, n^s + 1 = 2^{q+r}\} \Rightarrow 2^{q+r} - 2^q = 2 \Rightarrow 2^q(2^r - 1) = 2 \Rightarrow q = 1$). Tada $s = 1$, $n = 3$, ir gauname sprendinį $(k; m; n) = (3; 2; 3)$.

Atsakymas. $(k; m; n) = (3; 2; 3)$, $(t; 1; 2^t + 1)$, $t \in N$.

158. Pravartu nubrėžti tikslų brėžinį (žr. pav.), ir įsitikinti, kad viršūnė D yra apskritimo, apibrėžto apie trikampį ABC, viduje. Įrodysime tai. Pagal kosinusų teoremą $\cos B = \frac{AB^2+BC^2-AC^2}{2AB\cdot BC} = \frac{6^2+11^2-12^2}{2\cdot 6\cdot 11} = \frac{13}{132}$, taigi trikampis ABC — smailusis. Analogiškai $\cos D = \frac{7^2+8^2-12^2}{2\cdot 7\cdot 8} = \frac{-31}{112}$, ir kampas ADC — bukasis. Kadangi $\cos(180^\circ - D) = \frac{31}{112} > \frac{13}{132} = \cos B$ ir abu kampai $180^\circ - D$ ir B — smailieji, tai $180^\circ - D < B$, $B + D > 180^\circ$. Iš čia ir išplaukia, kad viršūnė D yra apskritimo, apibrėžto apie trikampį ABC, viduje.



Iš pradžių įrodysime teiginį: mažiausias skritulys, dengiantis smailųjį trikampį, yra to trikampio apibrėžtinis.

Iš tikrųjų, trikampio ABC apibrėžtinio apskritimo centras O yra trikampio viduje. Todėl $\angle AOB + \angle BOC + \angle COA = 360^\circ$. Perrašius šią lygybę atitinkamiems lankams, gauname $\smile AB + \smile BC + \smile CA = 360^\circ$, $\smile AB < 180^\circ$, $\smile BC < 180^\circ$, $\smile BA < 180^\circ$. Jei skritulys dengia taškus A, B ir C, tai jis dengia bent du iš trijų apibrėžtinio apskritimo lankų $\smile AB$, $\smile BC$, $\smile CA$. Todėl skritulys dengia apibrėžtinio apskritimo lanką, didesnį už 180°, taigi ir apibrėžtinio apskritimo skersmenį. Bet tada skritulio skersmuo ne mažesnis už apibrėžtino apskritimo skersmenį.

Mažiausias skritulys, dengiantis keturkampį $ABCD$, dengia ir smailųjį trikampį ABC, vadinasi, jis yra apibrėžtas apie trikampį ABC. Skritulio spindulį randame iš sinusų teoremos:

$$2R = \frac{AC}{\sin B} = \frac{12}{\sqrt{1 - \frac{13^2}{132^2}}} = 12 \cdot \frac{132}{\sqrt{17255}} = \frac{1584}{\sqrt{17255}}.$$

Atsakymas. $\frac{1584}{\sqrt{17255}}$.

159. a) Mažiausias skaičius, kurio skaitmenų suma lygi natūraliajam skaičiui $n = 9k + r$ (čia $k, r \in Z_0$, $0 \leqslant r < 9$) yra

$$\overline{r\underbrace{9\ldots9}_{k \text{ devynetų}}}.$$

Iš čia išplaukia teiginys: jei $a > b$ (a ir b natūralieji skaičiai), tai mažiausias skaičius, kurio skaitmenų suma lygi a, didesnis už mažiausią skaičių, kurio skaitmenų suma lygi b.

Remiantis šiuo teiginiu, mažiausią a_1 gausime paėmę mažiausią $a_5 = 1$, po to mažiausią $a_4 = 10$, mažiausią $a_3 = 19$, mažiausią $a_2 = 199$ ir pagaliau $a_1 = 1\underbrace{9\ldots9}_{22 \text{ devynetai}}$.

b) Sąlygoje nepasakyta, kad skaičiaus a_2 skaitmenys nelygūs nuliui, todėl didžiausio a_1 nėra. Pavyzdžiui, kai $a_1 = 1\underbrace{99\ldots9}_{11\ldots1 \text{ devynetas}}$, tai $a_2 = 1 + 9 \cdot 11\ldots1 = 100\ldots0$ ir $a_3 = 1$.

Kitas dalykas, jei ir skaičiaus a_2 skaitmenys nelygūs nuliui. Tada, remdamiesi analogišku teiginiu, gautume $a_3 = 9$, $a_2 = 111\ 111\ 111$, $a_1 = 111\ 111\ldots111$ (111 111 111 vienetų).

Atsakymas. a) $1\underbrace{9\ldots9}_{22 \text{ devynetai}}$. b) Nėra tokio skaičiaus.

160. Žr. 155 uždavinį.

161. Sakykime, kad trikampio kraštinė lygi a, o takų ilgiai k, m, n. Sujungę namą su lygiakraščio trikampio viršūnėmis, gausime tris trikampius, kurių pagrindai lygūs a, o aukštinės — k, m ir n. Lygiakraščio trikampio plotas lygus trijų trikampių plotų sumai, todėl $\frac{a^2\sqrt{3}}{4} = \frac{ak+am+an}{2}$, $k + m + n = \frac{a\sqrt{3}}{2}$. Taigi takų ilgių suma nepriklauso nuo namo vietos.

Atsakymas. Bet kurioje sklypo vietoje.

162. Žr. [1], 1019 uždavinį.

163. Plg. 155, 475. Duotasis reiškinys lygus $(x + 1)(x + 7) \cdot (x + 3)(x + 5) + 15 = (x^2 + 8x + 7)(x^2 + 8x + 15) + 15 = (x^2 + 8x + 11)^2 - 16 + 15 = (x^2 + 8x + 11)^2 - 1 = (x^2 + 8x + 12)(x^2 + 8x + 10) = (x + 2)(x + 6)(x + 4 + \sqrt{6})(x + 4 - \sqrt{6})$.

Atsakymas. $(x + 2)(x + 6)(x + 4 + \sqrt{6})(x + 4 - \sqrt{6})$.

164. Žr. [1], 1062 uždavinį.

165. Žr. 85 uždavinį.

166. Pažymime $u = x^2 + 3x - 4$, $v = 2x^2 - 5x + 3$. Lygtis virsta $u^3 + v^3 = (u + v)^3 \Leftrightarrow (u+v)(u^2-uv+v^2) = (u+v)^3 \Leftrightarrow (u+v)(u^2+2uv+v^2-u^2-uv+v^2) = 0 \Leftrightarrow (u+v)uv = 0 \Leftrightarrow u + v = 0$ arba $u = 0$ arba $v = 0$. Kai $u + v = 0$, tai $3x^2 - 2x - 1 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ arba $x = -\frac{1}{3}$. Kai $u = 0$, tai $x^2 + 3x - 4 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ arba $x = 4$. Kai $v = 0$, tai $2x^2 - 5x + 3 = 0 \Leftrightarrow x = 1$ arba $x = -\frac{3}{2}$.

Atsakymas. $-4, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{3}, 1$.

167. $x^5 + \frac{1}{x^5} = (x^3 + \frac{1}{x^3})(x^2 + \frac{1}{x^2}) - (x + \frac{1}{x}) = (x + \frac{1}{x}) \cdot (x^2 - 1 + \frac{1}{x^2})(x^2 + \frac{1}{x^2}) - a = a(a^2 - 3)(a^2 - 2) - a = a(a^4 - 5a^2 + 5) = a^5 - 5a^3 + 5a$.

Atsakymas. $a^5 - 5a^3 + 5a$, kai $|a| \geqslant 2$.

168. Pažymėkime trikampio kraštines a, b, c taip, kad $a \geqslant b \geqslant c$. Remdamiesi Herono formule ir formule $S = (a + b + c)r/2$, gauname

$$\sqrt{(a + b + c)(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c)} = 2(a + b + c) \Leftrightarrow$$
$$(a + b - c)(a - b + c)(-a + b + c) = 4(a + b + c).$$

Bet kurių dviejų kairės pusės dauginamųjų suma yra lyginis skaičius, o jų sandauga taip pat lyginis skaičius, todėl visi jie — lyginiai skaičiai. Pažymėję $2x = a+b-c$, $2y = a-b+c$, $2z = -a + b + c$, gauname lygtį $xyz = x + y + z$, kurią reikia išspręsti natūraliaisiais skaičiais. Kadangi $x \geqslant y \geqslant z$, tai $x < x + y + z < 3x$, nes kai $x = y = z$, tai $x^3 = 3x$, $x = \sqrt{3}$ nėra sveikasis skaičius. Taigi $x < xyz < 3x \Leftrightarrow 1 < yz < 3 \Leftrightarrow yz = 2 \Leftrightarrow y = 2, z = 1$. Tada $x = 3$, $a = x + y = 5$, $b = x + z = 4$, $c = y + z = 3$.

169. Žr. [1], 434, plg. 320, 335 uždavinius.

170. Kadangi $725 = 66 \cdot 11 - 1$, tai $96^n + 725 \cdot 85^n = (96^n - 85^n) + 11 \cdot (66 \cdot 85^n)$ dalijasi iš 11, nes pirmi skliaustai dalijasi iš $96 - 85 = 11$. Kita vertus, $725 = 4 \cdot 181 + 1$, todėl $96^n + 725 \cdot 85^n = (96^n + 85^n) + 181 \cdot (4 \cdot 85^n)$ dalijasi iš 181, nes pirmi skliaustai dalijasi iš $96 + 85 = 181$. Bet 11 ir 181 yra skirtingi pirminiai skaičiai, todėl duotasis reiškinys dalijasi ir iš $11 \cdot 181 = 1991$.

XLI OLIMPIADA (1992 m.)

171. Pažymėję triženklius skaičius raidėmis a ir b, o penkiaženklį — raide c, gauname

$$\frac{\overline{ab}}{c} = 3a \cdot \frac{b}{c} \Leftrightarrow \overline{ab} = 3a \cdot b \Leftrightarrow 1000a + b = 3a \cdot b \Leftrightarrow 1000 + \frac{b}{a} = 3b.$$

Aišku, kad $\frac{b}{a}$ — natūralusis skaičius. Be to, $1000 + \frac{b}{a}$ dalijasi iš 3, ir $\frac{b}{a} < 10$, nes $b \leqslant 999$, o $a \geqslant 100$. Taigi $\frac{b}{a}$ gali įgyti tik reikšmes 2, 5, 8.

Kai $b = 2a$, tai $1002 = 6a$, $a = 167$, $b = 334$. Taigi $167\,334 = 3 \cdot 167 \cdot 334$. Kadangi $a \cdot \frac{b}{c}$ turi būti sveikasis skaičius, tai reikia rasti skaičiaus $a \cdot b = 167 \cdot 334 = 167^2 \cdot 2 = \frac{167\,334}{3}$ visus penkiaženklius daliklius. Tačiau 167 yra pirminis skaičius (jis nesidalija iš 2, 3, 5, 7, 11, o $13^2 > 167$), todėl $c = 167^2 = \frac{167\,334}{6} = 27\,889$ arba $c = 55\,778$. Patikriname: $\frac{167\,334}{27\,889} = 6 = \frac{3 \cdot 167 \cdot 334}{27\,889}$ ir $\frac{167\,334}{55\,778} = 3 = \frac{3 \cdot 167 \cdot 334}{55\,778}$.

Kai $b = 5a$ arba $b = 8a$, tai a — dviženklis skaičius.

Atsakymas. 167, 334, 27 889 arba 167, 334, 55 778.

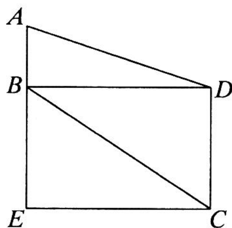
172. *Pirmas būdas.* Kadangi $x^3 = -y^2$ ir $y^2 = -x^3$, tai $xy + 1 = x^2 \cdot x^3 + y^3 \cdot y^2 = x^2(-y^2) + y^3(-x^3) \Leftrightarrow (xy)^3 + (xy)^2 + xy + 1 = 0 \Leftrightarrow (xy+1)((xy)^2+1) = 0 \Leftrightarrow xy = -1$.

Įstatę $y = -\frac{1}{x}$ į antrą lygtį, gauname $x^3 - \frac{1}{x^2} = 0 \Leftrightarrow x^5 = 1 \Leftrightarrow x = 1$. Tada $y = -1$. Patikriname, — tinka.

Antras būdas. Iš antros lygties $x = -\sqrt[3]{y^2}$. Tada iš pirmos lygties $-y\sqrt[3]{y^4} + y^5 = -y\sqrt[3]{y^2} + 1$, $y^2\sqrt[3]{y^4}(y\sqrt[3]{y^2} - 1) = 1 - y\sqrt[3]{y^2}$, $(y\sqrt[3]{y^2} - 1) \cdot (y^2\sqrt[3]{y^4} + 1) = 0$. Kadangi antras dauginamasis teigiamas, tai $y\sqrt[3]{y^2} = 1$, ir pakėlę kubu gauname $y^5 = 1$, t. y. $y = 1$. Tada $x = -\sqrt[3]{y^2} = -1$.

Atsakymas. $(1; -1)$.

173. Sakykime, $ABCD$ — iškilasis keturkampis, $AB + BD + DC = 2$. Tada $S_{ABD} \leqslant \frac{AB \cdot BD}{2}$, $S_{BDC} \leqslant \frac{BD \cdot DC}{2}$. Remiantis aritmetinio ir geometrinio vidurkių nelygybe (jei $a > 0$, $b > 0$, tai $\frac{a+b}{2} \geqslant \sqrt{ab}$, ir lygybė bus tik tada, kai $a = b$) $1 = 2S_{ABCD} = 2(S_{ABD} + S_{BDC}) \leqslant (AB + DC) \cdot BD \leqslant \left(\frac{AB+DC+BD}{2}\right)^2 = 1$. Kraštiniai nariai lygūs, todėl visos nelygybės virsta lygybėmis. Taigi $AB + DC = BD = 1$, $AB \perp BD$, $DC \perp BD$ (žr. pav.), $CE \perp AB$, o $AC^2 = (AB + BE)^2 + BD^2 = (AB + DC)^2 + 1 = 2$, $AC = \sqrt{2}$.



Atsakymas. $\sqrt{2}$.

174. Turime: $(50n+16)^2 = 2500n^2 + 1600n + 256$, o $(50n+34)^2 = 2500n^2 + 3400n + 1156$. Matome, kad dešinių pusių koeficientų skaitmenų suma ta pati: $2+5+1+6+2+5+6 = 27 = 2+5+3+4+1+1+5+6$. Aišku, kad ir pačių skaičių skaitmenų suma lygi 27, kai

$n = 10^k$, $k \geqslant 2$. Tada pirmas skaičius lygus $25\ldots16\ldots0256$, o antras $25\ldots16\ldots1156$ (kiekvieno daugtaškio vietoje yra $k-2$ nuliai).

Beje, kai $n = 1$ arba 10, abiejų skaičių skaitmenų suma irgi ta pati.

175. Sekoje 000 111 000 tikrai yra visi aštuoni greta stovinčių skaitmenų trejetai 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111. Kita vertus, trumpesnėje sekoje bus mažiau kaip 8 trejetai.

Atsakymas. 10.

176. Matematinės indukcijos metodu nesunku įrodyti bendresnę nelygybę.

Jei $a_0 < a_1 < a_2 < \cdots < a_n$ — natūralieji skaičiai, tai

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} \leqslant 1 - \frac{1}{2^n}. \tag{1}$$

Įrodymas. Taikant matematinės indukcijos metodą, dažnai prireikia įrodinėti stipresnį teiginį, nes tiesiogiai įrodyti matematinės indukcijos būdu būtent reikiamą teiginį nepavyksta. Štai ir dabar įrodysime, kad

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1}, a_n]} \leqslant \frac{1}{a_0} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^n}\right). \tag{2}$$

Kai $n = 1$, tai $\frac{1}{[a_0,a_1]} \leqslant \frac{1}{a_0} \cdot (1 - \frac{1}{2})$, nes $\frac{[a_0,a_1]}{a_0}$ yra sveikasis skaičius, didesnis už 1.

Sakykime, kad nelygybė

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_{k-2}, a_{k-1}]} \leqslant \frac{1}{a_0}\left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right)$$

teisinga su bet kuriais k natūraliųjų skaičių $a_0, a_1, \ldots, a_{k-1}$, tenkinančių nelygybę $a_0 < a_1 < \cdots < a_{k-1}$.

Imkime $k+1$ natūralųjį skaičių $a_0 < a_1 < \cdots < a_k$. Tada pagal indukcijos prielaidą

$$\frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{[a_1, a_2]} + \cdots + \frac{1}{[a_{k-1}, a_k]} \leqslant \frac{1}{[a_0, a_1]} + \frac{1}{a_1} \cdot \left(1 - \frac{1}{2^{k-1}}\right). \tag{3}$$

Pažymėkime $N = \frac{[a_0,a_1]}{a_0}$. Aišku, kad N — natūralusis skaičius. Kadangi $a_0 < a_1$, o $\frac{[a_0,a_1]}{a_1}$ — taip pat natūralusis skaičius, tai $\frac{[a_0,a_1]}{a_1} \leqslant N - 1$. Iš čia $a_1 \geqslant \frac{[a_0,a_1]}{a_0} \cdot \frac{a_0}{N-1} = a_0 N(N-1)$. Dabar (3) nelygybės dešinė pusė ne didesnė už $\frac{1}{a_0 N} + \frac{N-1}{a_0 N} \cdot (1 - \frac{1}{2^{k-1}}) = \frac{1}{a_0} - \frac{N-1}{a_0 N 2^{k-1}} \leqslant \frac{1}{a_0} \cdot (1 - \frac{1}{2^k})$, nes $\frac{N-1}{N} \geqslant \frac{1}{2}$. Remiantis matematinės indukcijos principu, (2) nelygybė, ir juo labiau (1) nelygybė įrodyta.

Pastaba. Įrodydami (1) nelygybę matėme, kaip išradingai kartais tenka taikyti matematinės indukcijos metodą. Nesunku suvokti, kodėl tiesiogiai nepavyksta įrodyti (1) nelygybės: nelygybė $\frac{1}{[a_k,a_{k+1}]} \leqslant \frac{1}{2^{k+1}}$ gali būti ir neteisinga, o būtent šios nelygybės reikia, kad iš (1) nelygybės su $n = k$ išplauktų (1) nelygybė su $n = k+1$.

Analogiškai pažymėję $S_n = 1 - \frac{1}{2^n} - \left(\frac{1}{[a_0,a_1]} + \cdots + \frac{1}{[a_{n-1},a_n]}\right) = \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{[a_0,a_1]}\right) + \left(\frac{1}{4} - \frac{1}{[a_1,a_2]}\right) + \cdots + \left(\frac{1}{2^n} - \frac{1}{[a_{n-1},a_n]}\right)$ matome, kad seka S_n anaiptol ne didėjanti (kai $a_0 = 1$, $a_1 = 2$, $a_n = 3 \cdot 2^{n-2}$, jei $n \geqslant 2$, tai seka S_n net mažėja pradedant nuo trečio nario).

177. Iš pirmos lygties

$$y^2 = \frac{2x}{1+x^2} \leqslant 1,$$

nes $2x \leqslant 1 + x^2 \Leftrightarrow 0 \leqslant (x-1)^2$. Todėl $-1 \leqslant y \leqslant 1$. Išskiriame pilnąjį kvadratą antros lygties kairėje pusėje:

$$2(x-1)^2 + (1 + y^3) = 0.$$

Bet abu dėmenys neneigiami, taigi lygybė galima tik tada, kai abu dėmenys lygūs nuliui. Vadinasi, $x = 1$, $y = -1$. Patikriname, — sprendinys tinka.

Atsakymas. $(1; -1)$.

178. Kadangi $|ax + b| = |(-a)x + (-b)|$, tai galime laikyti, kad $a \geqslant 0$ (ir lygiai taip pat, kad $c \geqslant 0$). Jei $a = 0$ (tą patį gausime, kai $c = 0$), tai lygties sprendiniai tenkina arba kvadratinę lygtį $|b| + cx + d = p(x)$, arba kvadratinę lygtį $|b| - cx - d = p(x)$, taigi yra ne daugiau kaip 4 sprendiniai. Dabar nagrinėsime atvejį, kai $a > 0$ ir $c > 0$.

Tiesinių dvinarių $ax + b$ ir $cx + d$ šaknys yra $-\frac{b}{a}$ ir $-\frac{d}{c}$. Pagaliau, galime laikyti, kad $-\frac{b}{a} \leqslant -\frac{d}{c}$ (nes kairės pusės dėmenis galima sukeisti vietomis ir antrą lygtį padauginti iš -1). Jei $\frac{b}{a} = \frac{d}{c}$, tai lygtis virsta $(a \pm c) \cdot \left|x + \frac{b}{a}\right| = p(x)$ ir turi ne daugiau kaip 4 sprendinius. Taigi nagrinėsime atvejį, kai $-\frac{b}{a} < -\frac{d}{c}$. Lygties kairę pusę žymėkime $f(x)$.

1) Kai $x \leqslant -\frac{b}{a}$, tai gauname lygtį

$$-ax - b - cx - d = p(x) \iff -(a+c)x - b - d = p(x). \qquad (1)$$

Kai $-\frac{b}{a} < x < -\frac{d}{c}$, tai

$$ax + b - cx - d = p(x) \iff (a-c)x + b - d = p(x). \qquad (2)$$

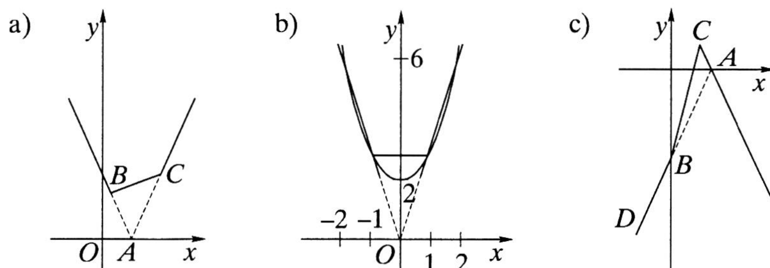
Kai $-\frac{d}{c} \leqslant x$, tai

$$ax + b + cx + d = p(x) \iff (a+c)x + b + d = p(x). \qquad (3)$$

(1) ir (3) lygčių kairių pusių x koeficientai skiriasi tik ženklu, todėl kairiųjų pusių grafikai — tiesės, sudarančios lygius smailiuosius kampus su Ox ašimi. Be to, (1)–(3) lygčių kairių pusių x keoficientai didėja:

$$-(a+c) < a - c < a + c.$$

Taigi $f(x)$ — vadinamoji iškiloji funkcija, o jos grafikas susideda iš dviejų spindulių ir atkarpos (žr. a) pav.). Pravartu pastebėti, kad spindulių tęsiniai kertasi Ox ašies taške $x = -\frac{b+d}{a+c}$, nes $-(a+c)x - b - d = 0 = (a+c)x + b + d \Leftrightarrow x = -\frac{b+d}{a+c}$.



Duotosios lygties sprendiniai tenkina arba (1), arba (2), arba (3) kvadratinę lygtį, taigi ji turi ne daugiau kaip 6 sprendinius. Labai svarbu įrodyti, kad duotoji lygtis gali turėti būtent 6 sprendinius, arba sukonstruoti tokią parabolę, kuri kerta $f(x)$ grafiką būtent 6 taškuose. Įrodymas gali būti toks. Braižome bet kurią parabolę, kurios simetrijos ašis yra $x = -\frac{b+d}{a+c}$, o x^2 koeficientas teigiamas, po to ją taip pakeliame ar nuleidžiame, kad ji liestų spindulius AB ir AC, pagaliau iš homotetijos centro A parabolę taip padidiname ar sumažiname, kad ji liestų ir atkarpą BC. Dabar parabolė liečia $f(x)$ grafiką trijuose taškuose ir, truputį paslinkta žemyn, ji kirs $f(x)$ grafiką 6 taškuose. Galima samprotauti ir kitaip. Braižome parabolę su teigiamu x^2 koeficientu, nekertančią Ox ašies. Iš parabolės simetrijos ašies ir Ox ašies susikirtimo taško brėžiame du spindulius, kertančius parabolę ir sudarančius lygius kampus su Ox ašimi. Galų gale jungiame du spindulių taškus atkarpa, kertančia parabolę žemiau negu ją kerta spinduliai. Dešiniojo spindulio lygtis turėtų būti $y = (a+c)x + b + d$, kairiojo $y = (-a-c)x - b - d$, o atkarpos $y = (a-c)x + b - d$. Taigi iš nubrėžtųjų spindulių ir atkarpos lygčių rasime $a+c$, $a-c$, $b+d$ ir $b-d$, vadinasi, ir duotosios lygties koeficientus a, b, c, d, su kuriais $f(x)$ grafikas sutaps su nubrėžtuoju grafiku. Vis dėlto daug paprasčiau konstruoti konkrečius $f(x)$ ir $p(x)$ grafikus.

Parabolę $y = x^2$ kirskime tiesėmis, atitinkamai einančiomis per taškus $(-1; 1)$ ir $(-2; 4)$, $(1; 1)$ ir $(2; 4)$, bei tiese $y = \frac{1}{2}$. Pirmos ir antros tiesės lygtys yra $y = -3x - 2$ ir $y = 3x - 2$, tiesės kertasi taške $(0; -2)$, todėl parabolę ir tieses reikia pastumti į viršų per 2 vienetus (žr. b) pav.). Gauname parabolę $y = x^2 + 2$, spindulius tiesėse $y = -3x$ ir $y = 3x$, o atkarpą tiesėje $y = \frac{5}{2}$.

Raskime koeficientus a, b, c, d, su kuriais $f(x)$ grafikas sutampa su nubrėžtuoju grafiku. (1) lygties kairė pusė turi būti lygi $-3x$, (2) lygties $\frac{5}{2}$, o (3) lygties $3x$. Taigi

$$\begin{cases} -(a+c)x - b - d = -3x, \\ (a-c)x + b - d = -\frac{5}{2}, \\ (a+c)x + b + d = 3x. \end{cases}$$

Šią sistemą turi tenkinti visi x, todėl

$$\begin{cases} a + c = 3, \\ a - c = 0, \\ b + d = 0, \\ b - d = \frac{5}{2}, \end{cases} \Leftrightarrow a = c = \frac{3}{2},\ b = -d = \frac{5}{4}.$$

Gavome lygtį $\left|\frac{3}{2} \cdot x + \frac{5}{4}\right| + \left|\frac{3}{2} \cdot x - \frac{5}{4}\right| = x^2 + 2$, arba $|6x + 5| + |6x - 5| = 4x^2 + 8$. Pakeitus mastelį, galima sumažinti koeficientus ir gauti lygtį $|3x + 5| + |3x - 5| = x^2 + 8$.

Patikrinimas. Kai $x < -\frac{5}{3}$, gauname lygtį $-5 - 3x + 5 - 3x = x^2 + 8 \Leftrightarrow x^2 + 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = -4$ arba $x = -2$, abu sprendiniai mažesni už $-\frac{5}{3}$.

Kai $-\frac{5}{3} \leqslant x \leqslant \frac{5}{3}$, tai $3x + 5 + 5 - 3x = x^2 + 8 \Leftrightarrow x^2 = 2 \Leftrightarrow x = \pm\sqrt{2}$, abu sprendiniai tarp $-\frac{5}{3}$ ir $\frac{5}{3}$.

Kai $x > \frac{5}{3}$, tai $3x + 5 + 3x - 5 = x^2 + 8 \Leftrightarrow x^2 - 6x + 8 = 0 \Leftrightarrow x = 2$ arba $x = 4$, abu sprendiniai didesni už $\frac{5}{3}$.

2) Kai $x \leqslant -\frac{b}{a}$, tai gauname lygtį

$$(c - a)x + d - b = p(x). \tag{4}$$

Kai $-\frac{b}{a} \leqslant x \leqslant -\frac{d}{c}$, tai

$$(a+c)x + b + d = p(x). \tag{5}$$

Kai $-\frac{d}{c} \leqslant x$, tai

$$(a-c)x + b - d = p(x). \tag{6}$$

Ir šiuo atveju $f(x)$ grafikas susideda iš dviejų spindulių, kurie sudaro lygius kampus su Ox ašimi ir kurių vienas bei kito tęsinys kertasi Ox ašies taške, ir atkarpos. Tačiau šiuo atveju labai svarbu yra tai, kad (4)–(6) lygčių x koeficientai nedidėja:

$$c - a < a + c, a + c > a - c,$$

taigi gauname (žr. c) pav.) neiškiląją funkciją $f(x)$.

Sakykime, parabolės šakos nukreiptos į viršų. Jei parabolė kerta $f(x)$ grafiko atkarpą BC du kartus, tai tarp kirtimosi taškų parabolė yra po atkarpa BC, o į dešinę nuo dešiniojo kirtimosi taško parabolė yra virš tiesės BC ir juo labiau virš spindulio CA. Lygiai taip pat, jei parabolė du kartus kerta spindulį CA, tai į kairę nuo kairiojo kirtimosi taško parabolė yra virs tesės CA ir juo labiau virš atkarpos BC. Taigi parabolė kerta atkarpą BC ir spindulį CA iš viso ne daugiau kaip dviejuose taškuose. Panašiai įrodome, kad parabolė, kurios šakos nukreiptos žemyn, kerta spindulį BD ir atkarpą BC iš viso ne daugiau kaip dviejuose taškuose. Vadinasi, parabolė kerta $f(x)$ grafiką ne daugiau kaip keturiuose taškuose. Kita vertus (pagal 1) atvejo lygties pavyzdį), lygtis

$$|6x| = x^2 + 8,$$

čia $b = c = d = 0$, turi būtent keturis sprendinius -4, -2, 2 ir 4.

Atsakymas. 1) šešis; 2) keturis.

179. Sakykime, progresijos pirmasis narys $a < 10^k$ ir progresijos skirtumas $d < 10^k$, k — sveikasis neneigiamas skaičius. Tada skaičių $\frac{x}{10^k}$ ir $\frac{x+d}{10^k}$ sveikosios dalys skiriasi ne daugiau kaip vienetu. Todėl skaičių $\frac{a+nd}{10^k}$, $n \in N$, sveikoji dalis įgis visas natūraliąsias reikšmes, taigi ir 1992.

180. Į vieną liestinę (žr. pav.) nuleiskime statmenis O_3A, O_1B ir O_2C.

Iš stačiosios trapecijos ABO_1O_3 gauname

$$AB^2 + (AO_3 - BO_1)^2 = O_1O_3^2 \Leftrightarrow AB^2 + (r_3 - r_1)^2 = (r_1 + r_3)^2 \Leftrightarrow AB = 2\sqrt{r_1 r_3}.$$

Lygiai taip pat $AC = 2\sqrt{r_2 r_3}$. Be to, iš stačiosios trapecijos BCO_2O_1 gauname

$$BC^2 + (CO_2 - BO_1)^2 = O_1O_2^2 \Leftrightarrow$$
$$BC^2 + (2r_3 - r_1 - r_2)^2 = (r_1 + r_2)^2 \Leftrightarrow$$
$$BC = \sqrt{4r_1r_3 + 4r_2r_3 - 4r_3^2}.$$

Kadangi $AC - AB = BC$, tai $\sqrt{r_2r_3} - \sqrt{r_1r_3} = \sqrt{r_1r_3 + r_2r_3 - r_3^2} \Rightarrow$ (keliame kvadratu) $\Rightarrow r_1r_3 + r_2r_3 - 2r_3\sqrt{r_1r_2} = r_1r_3 + r_2r_3 - r_3^2 \Rightarrow r_3 = 2\sqrt{r_1r_2}$.

181. Stačiojo trikampio, kurio kraštinės lygios 3, 4, 5, dvi aukštinės yra statiniai, taigi sveikieji skaičiai. Pagal ploto formulę, trečia aukštinė lygi $3 \cdot \frac{4}{5} = \frac{12}{5}$. Todėl stačiojo trikampio, kurio kraštinės 5 kartus ilgesnės, t. y. 15, 20, 25, ir trečia aukštinė — sveikasis skaičius (lygus 12).

Iš dviejų tokių trikampių galima sudėti smailųjį (ir bukąjį) lygiašonį trikampį, kurio kraštinės 30, 25, 25 (arba 40, 25, 25), o aukštinė, nuleista į lygiašonio trikampio pagrindą, lygi 20 (arba 15), o kitos aukštinės pagal ploto formulę lygios $\frac{30 \cdot 20}{25} = \frac{40 \cdot 15}{25} = 24$.

Beje, iš dviejų nelygių Pitagoro trikampių (t. y. stačiųjų trikampių, kurių kraštinės sveikos) galima sudėti ieškomą nelygiašonį smailųjį ir bukajį trikampį. Sakykime, iš stačiųjų trikampių, kurių kraštinės 9, 12, 15 bei 5, 12, 13, galima sudėti trikampį, kurio kraštinės 13, 14, 15, o aukštinė, nuleista į 14 ilgio kraštinę, lygi 12. Kitos aukštinės lygios $\frac{14 \cdot 12}{13}$ ir $\frac{14 \cdot 12}{15}$. Todėl trikampio, kurio kraštinės lygios $65 \cdot 13$, $65 \cdot 14$, $65 \cdot 15$, aukštinės taip pat sveikieji skaičiai.

Atsakymas. a) Taip, yra; b) taip, yra; c) taip, yra.

182. Nesunku atspėti 8 sprendinius: $x = \pm 1$, $y = \pm 1$, $z = \pm 1$. Laikykime, kad bent vienas iš skaičių x^2, y^2, z^2 nelygus 1. Jei jie visi trys ne didesni už 1, tai iš pirmos lygties $3 = x^2 + y^4 + z^6 < 1 + 1 + 1 = 3$, ir gauname prieštarą. Taigi bent vienas iš x^2, y^2, z^2 didesnis už 1. Lygiai taip pat gauname, kad bent vienas iš jų mažesnis už 1. Taigi arba vienas iš skaičių x^2, y^2, z^2 didesnis už 1, o kiti ne didesni už 1, arba vienas iš skaičių x^2, y^2, z^2 mažesnis už 1, o kiti du ne mažesni už 1.

Pirmu atveju, sakykime, $y^2 > 1$, $z^2 \leqslant 1$, $x^2 \leqslant 1$ (kiti atvejai analogiški, nes sistema cikliška, t. y. cikliškai pakeitus kintamuosius x į y, y į z, z į x, sistema lieka ta pati). Tada iš lygčių su y^2 ir y^6 gauname prieštarą, nes $3 = y^2 + z^4 + x^6 < y^6 + z^2 + x^4 = 3$.

Antru atveju, sakykime, $z^2 < 1$, o $x^2 \geqslant 1$, $y^2 \geqslant 1$. Iš lygčių su z^2 ir z^6 vėl gauname prieštarą, nes $3 = z^2 + x^4 + y^6 > z^6 + x^2 + y^4 = 3$.

Pastaba. Nesunku suvokti, kad mūsų sistema „atsirado“ iš sistemos

$$\begin{cases} x + y^2 + z^3 = 3, & (1) \\ x^2 + y^3 + z = 3, & (2) \\ x^3 + y + z^2 = 3, & (3) \end{cases}$$

kurią išspręsti žymiai sunkiau (jeigu ieškotume tik neneigiamų sprendinių, turėtume jau išspręstą uždavinį).

Sudėkime visas tris lygtis:

$$x(1 + x + x^2 + y(1 + y + y^2) + z(1 + z + z^2) = 9.$$

Kairėje pusėje 3 dėmenų suma lygi 9, todėl yra tik tokios galimybės: 1) visi trys dėmenys lygūs 3; 2) du dėmenys didesni už 3; 3) vienas dėmuo didesnis už 3.

Kadangi funkcijos $g(x) = x(1 + x + x^2) = x + x^2 + x^3$ išvestinė $g'(x) = 3x^2 + 2x + 1 > 0$ su visais x (neužmirškite, kad nagrinėjame ir neigiamąsias reikšmes), nes trinario diskriminantas neigiamas, tai $g(x)$ — didėjanti funkcija. Kadangi $g(1) = 3$, tai 1) atveju $x = y = z = 1$, ir turime sistemos sprendinį.

Įrodysime, kad daugiau sprendinių nebėra. 2) atveju du nežinomieji didesni už 1. Galime laikyti, kad $x > 1$, $y > 1$, $z < 1$ (kitaip galėtume sužymėti kintamuosius iš naujo). 3) atveju vienas nežinomasis didesnis už 1, ir laikysime, kad $x \leqslant 1$, $y \leqslant 1$, $z > 1$.

Atvejis $x > 1$, $y > 1$, $z < 1$. Atimkime (1) lygtį iš (2) lygties

$$x(x-1) + y^2(y-1) = z(z^2-1). \tag{4}$$

Kadangi (4) lygties kairė pusė teigiama, tai $-1 < z < 0$. Iš (3) lygties matome, kad tada $x^3 < 2$, t. y. $x < 1{,}3$. Iš (1) lygties $y^2 > 1{,}7$, taigi $y > 1{,}3$. Bet tada (4) lygties kairė pusė didesnė už $y^2(y-1) > 1{,}7 \cdot 0{,}3 > 0{,}5$, o dešinė $z(z^2-1) < 0{,}4$ nes funkcijos $h(z) = z^3 - z$ išvestinė lygi $3z^2 - 1$, intervale $z < 0$ kritinis taškas yra $z = -\frac{1}{\sqrt{3}}$, ir didžiausia reikšmė $h(-\frac{1}{\sqrt{3}}) = \frac{2\sqrt{3}}{9} < 0{,}4$.

Atvejis $x \leqslant 1$, $y \leqslant 1$, $z > 1$. Kadangi su nagrinėjamomis reikšmėmis dešinė (4) lygties pusė teigiama, o $y^2(y-1) \leqslant 0$, tai turi būti $x(x-1) > 0$, t. y. $x < 0$.

Dabar atimkime (3) lygtį iš (1) lygties: $z^2(z-1) = y(1-y) + x(x^2-1)$. Čia $y(1-y) \leqslant 0{,}25$ (net ir su visomis y reikšmėmis), $x(x^2-1) < 0{,}4$, kai $x < 0$ (šią nelygybę jau įrodėme anksčiau), todėl $z^2(z-1) < 0{,}65$, vadinasi, $z < 1{,}4$. Bet tada (3) nelygybės kairė pusė $x^3 + y + z^2 < 0 + 1 + 1{,}96 < 3$. Prieštara.

Taigi sistema (1) – (3) turi vienintelį sprendinį (1; 1; 1).

Atsakymas. (± 1; ± 1; ± 1), aštuoni sprendiniai.

183. Kadangi dvi aukštinės lygios, tai pagal trikampio ploto formulę atitinkamos trikampio kraštinės lygios. Žymėkime a, a, b trikampio kraštines, r įbrėžtinio apskritimo spindulį. Remiantis ploto formulėmis $a \cdot 1 = (a + a + b)r$,

$$r = 1\Big/\Big(2 + \frac{b}{a}\Big). \tag{1}$$

Nuleidę aukštinę į pagrindą b, gauname statųjį trikampį, kurio įžambinė lygi a, o vienas statinis $\frac{b}{2}$, todėl

$$0 < \frac{b}{2} < a. \tag{2}$$

Ir atvirkščiai, jei teisinga (2) nelygybė, tai yra toks statusis trikampis, kurio statinis $\frac{b}{2}$, o įžambinė a. Todėl yra ir lygiašonis trikampis, kurio kraštinės b, a, a, ir panašus į pastarąjį trikampį lygiašonis trikampis, kurio dvi aukštinės lygios 1.

Taigi iš (2) nelygybės išplaukia, kad santykis $\frac{b}{a}$ gali įgyti bet kurią intervalo (0; 2) reikšmę, r gali įgyti bet kurią intervalo ($\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$) reikšmę.

Atsakymas. Visas intervalo ($\frac{1}{4}$; $\frac{1}{2}$) reikšmes.

184. Jei $x \leqslant 0$ arba $x \geqslant 1$, tai $100x(1-x) \leqslant 0 \leqslant 1$. Laikykime, kad $0 < x < 1$. Nelygybę $100x(1-x) \leqslant 1$ galima dabar įrodyti keliais būdais.

I būdas. Pirmą nelygybę padauginę iš $1 - x > 0$, antrą — iš $x > 0$, turime

$$100x(1-x)(1-y) \leqslant 1 - x, \quad 100x(1-x)y \leqslant x.$$

Sudėję šias dvi nelygybes, gauname reikiamą nelygybę.

II būdas. Jei $x \leqslant y$, tai $100x(1-x) \leqslant 100y(1-x) \leqslant 1$. Jei $x > y$, tai $100x(1-x) \leqslant 100x(1-y) \leqslant 1$.

III būdas. Iš pirmos nelygybės $y \geqslant 1 - \frac{1}{100x}$, todėl $1 \geqslant 100y(1-x) \geqslant 100\big(1-\frac{1}{100x}\big)(1-x) = \big(100-\frac{1}{x}\big)(1-x) = 100 - \frac{1}{x} - 100x + 1 \Rightarrow 0 \geqslant 100x - 1 - 100x^2 \Rightarrow 100x(1-x) \leqslant 1$.

IV būdas. „Išsireikškime" y iš pirmos ir antros nelygybės:

$$y \geqslant 1 - \frac{1}{100x}, \quad y \leqslant \frac{1}{100(1-x)}.$$

Todėl $1 - \frac{1}{100x} \leqslant \frac{1}{100(1-x)}$. Sutvarkę gauname reikiamą nelygybę: $100x(1-x) - (1-x) \leqslant x$, $100x(1-x) \leqslant 1$.

185. a) Aišku, kad seka, kurioje yra visi galimi trejetai, nepralaimės jokiai kitai sekai. Nesunkiai randame dešimties narių seką

$$000\ 1110100,$$

kurioje tikrai yra visi galimi (jų yra 2^3) trejetai: 000, 001, 010, 011, 100, 101, 110, 111.

Imkime mažiau kaip 10 skaitmenų, bet daugiau kaip 3 skaitmenų seką. Joje yra mažiau kaip 8 trejetai, taigi bent vieno trejeto, sakykime, abc, nebus. Todėl jau po pirmo ėjimo ji pralaimės (nes joje neliks skaitmenų) sekai

$$000\ 1110100abc,$$

nes pastarosios sekos trejetas abc nebus nubrauktas, taigi skaitmuo c tikrai liks (nors trejetas $00a$ arba $0ab$ gali ir būti užbrauktas). Taigi trumpiausia nepralaiminti daugiau kaip trijų skaitmenų seka turi 10 skaitmenų.

b) Konstruokime trumpiausią seką, turinčią visus galimus (tokių yra 2^4) ketvertus. Pradėsime nuo keturių nulių, o toliau kiekvieną kartą rašysime nulį, jei tik nepasikartos kuris nors ketvertas, ir vienetą priešingu atveju. Taigi rašome

$$00001000$$

Dabar nei 0, nei 1 netinka, taigi paskutinį nulį reikia keisti 1. Tokį grįžimą atgal žymėsime taip:

$$0000100\bar{1}$$

Tęsiame toliau:

$$0000100\bar{1}1000$$

Vėl negalime rašyti nei 0, nei 1, bet paskutinio nulio negalima keisti vienetu, nes pasikartos ketvertas 1001. Taigi priešpaskutinį nulį reikia keisti vienetu. Žymėsime taip:

$$0000100\bar{1}100\bar{\bar{1}}$$

Tęsiame toliau:

$$0000\,100\,\bar{1}10\,\bar{\bar{1}}0111000$$

Dabar jau netinka nei paskutinis, nei priešpaskutinis, nei trečias nuo galo nulis. Taigi

$$0000\,100\,\bar{1}10\,\bar{\bar{1}}10111\,\bar{\bar{\bar{1}}}000$$

Šioje 19 narių sekoje tikrai yra visi galimi ketvertai (jų yra 2^4):

0000, 0001, 0010, 0011, 0100, 0101, 0110, 0111,
1000, 1001, 1010, 1011, 1100, 1101, 1110, 1111.

Baigti spręsti b) uždavinį galima lygiai taip pat kaip ir a) uždavinį.

Galima pradėti ir nuo keturių vienetų. Tada nereikia grįžti atgal: 1111000000110101111.

Atsakymas. a) 10; b) 19.

186. Turime $1! = 1$, $2! = 2$, $3! = 6$, $4! = 24$, $5! = 120$, $6! = 720$, o $7! = 5040$. Kadangi $7!$ keturženklis skaičius, tai skaitmenys a, b ir c ne didesni už 6. Bet jie ne didesni ir už 5, nes kitaip duotosios lygybės dešinė pusė būtų didesnė už 720, taigi a būtų ne mažesnis už 7.

Bent vienas iš skaitmenų lygus 5, nes kitaip dešinė pusė būtų ne didesnė už $4!+4!+4! = 72$. Be to, $a < 4$, nes net $5!+5!+5! = 360 < 400$; $a \neq 3$, nes net $3!+5!+5! = 246 < 300$; $a \neq 2$, nes $2! + 5! + 5! = 242$, o $2! + 4! + 5! < 200$. Taigi $a = 1$, ir dešinė pusė lygi $1! + 5! + x! = 121 + x!$. Kadangi kairė pusė mažesnė už 200, tai $x \leqslant 4$. Bet su x reikšmėmis 1, 2, 3 (ir net su reikšme 0, kuri duotų $0! = 1$) dešinės pusės suma neturi skaitmens 5. Lieka $x = 4$, tada $121 + 4! = 145$, ir gauname lygybę

$$145 = 1! + 4! + 5!.$$

Atsakymas. 145.

187. Pažymėję $y = \frac{x}{x+1}$, gauname sistemą

$$\begin{cases} x^2 + y^2 = 1, \\ xy = x - y. \end{cases}$$

Iš pirmos lygties atėmę dvigubą antrą lygtį ir prie pirmos lygties pridėję dvigubą antrą lygtį gauname ekvivalenčią sistemą

$$\begin{cases} (x-y)^2 = 1 - 2(x-y), \\ (x+y)^2 = 1 + 2(x-y), \end{cases} \quad \begin{cases} (x-y+1)^2 = 2, \\ (x+y)^2 = 1 + 2(x-y). \end{cases}$$

Iš paskutinės lygties $x - y > -\frac{1}{2}$, todėl $x - y + 1 > 0$, ir gauname

$$\begin{cases} x - y + 1 = \sqrt{2}, \\ (x+y)^2 = 1 + 2(\sqrt{2} - 1), \end{cases} \quad \begin{cases} x - y = \sqrt{2} - 1, \\ x + y = \pm\sqrt{2\sqrt{2} - 1}, \end{cases} \quad \begin{cases} x = \frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}, \\ y = \frac{1-\sqrt{2}\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}. \end{cases}$$

Kadangi gautos x reikšmės nelygios -1 ($x = -1$ netinka (1) sistemos antrai lygčiai), tai aišku, kad

$$x = \frac{\sqrt{2} - 1 \pm \sqrt{2\sqrt{2} - 1}}{2}$$

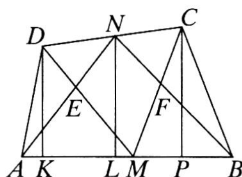
yra (ir visi) pradinės lygties sprendiniai.

Atsakymas. $x = \frac{\sqrt{2}-1\pm\sqrt{2\sqrt{2}-1}}{2}$.

188. Jei diskriminantas $b^2 - 4ac$ yra nelyginis skaičius, tai ir b — nelyginis skaičius, $b = 2n+1$. Tada diskriminanto dalybos iš 4 liekana lygi 1, nes $b^2-4ac = 4(n^2+n-ac)+1$. Taigi diskriminantas negali būti lygus 23.

Atsakymas. Negali.

189. a) Kadangi $S_{ANM} = S_{BNM}$ ir $S_{CNM} = S_{DNM}$, tai (žr. pav.) $S_{ANCM} = S_{BNDM}$. Iš abiejų pastarosios lygybės pusių atėmę S_{ENFM}, gausime reikiamą lygybę.



b) Iš taškų D, N ir C nuleiskime statmenis DK, NL ir CP į tiesę AB. Tada NL yra trapecijos (arba stačiakampio) $CDKP$ vidurinė linija, todėl $NL = \frac{DK+CP}{2}$. Iš čia

$$S_{ADM} + S_{BCM} = \frac{AM \cdot DK + BM \cdot CP}{2} = AM \cdot NL,$$

taigi

$$S_{ADM} + S_{BCM} = S_{ANB}.$$

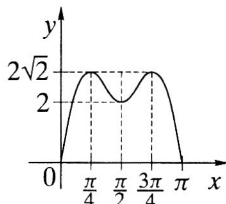
Atėmę iš abiejų pusių $S_{AEM} + S_{BFM}$ gausime reikiamą lygybę.

190. Sakykime, kad visų $2n$ sandaugų suma lygi nuliui. Tada lygiai n tų sandaugų lygios 1, o kitos n lygios (-1). Taigi visų $2n$ sandaugų sandauga lygi $(-1)^n$. Tačiau ši sandauga lygi 1, nes joje kiekvienas lentelės skaičius sudaugintas du kartus. Vadinasi, n — lyginis skaičius.

Jei n — lyginis skaičius, tai $2n$ sandaugų suma lygi nuliui, pavyzdžiui, kai pirmos eilutės skaičiai lygūs (-1), o visi kiti lygūs 1.

Atsakymas. a) Gali; b) Negali.

191. Pažymėkime $f(x) = 3\sin x + \sin 3x = 6\sin x - 4\sin^3 x$. Funkcijos $f(x)$ išvestinė $f'(x) = 3(\cos x + \cos 3x) = 6(2\cos^2 x - 1)\cos x$. Kai $1 > \cos x > \sqrt{\frac{1}{2}}$, tai funkcija didėja; kai $\cos x = \sqrt{\frac{1}{2}}$, tai $\sin x = \sqrt{1-\cos^2 x} = \sqrt{\frac{1}{2}}$ (nagrinėjame tik intervalą $[0; \pi]$) ir $f(x) = 4\sqrt{\frac{1}{2}} = 2\sqrt{2}$; kai $\sqrt{\frac{1}{2}} > \cos x > 0$, tai funkcija mažėja, be to, funkcijos grafikas simetriškas tiesės $x = \frac{\pi}{2}$ atžvilgiu (žr. pav).



Vadinasi, kai $0 \leqslant p < 1$, tai yra du sprendiniai; kai $p = 1$, tai trys sprendiniai; kai $1 < p < \sqrt{2}$, tai keturi sprendiniai; kai $p = \sqrt{2}$, tai du sprendiniai.

Atsakymas. Kai $0 \leqslant p < 1$ arba $p = \sqrt{2}$, tai du sprendiniai; kai $p = 1$, tai trys sprendiniai; kai $1 < p < \sqrt{2}$, tai keturi sprendiniai; kai $p < 0$ arba $p > \sqrt{2}$, tai sprendinių nėra.

192. Apibrėžimo sritis $y \neq 0$. Antrą lygtį padauginę iš $\frac{2}{y}$ ir panaikinę iracionalumą vardiklyje, gauname

$$2\left(\frac{x}{y} + y\right) + 2\sqrt{x^2+1} - 2x = 0. \qquad (1)$$

Iš pirmos lygties atimame pastarąją:

$$\frac{x^2}{y^2} + 2x + y^2 - 2\left(\frac{x}{y} + y\right) = 3\left(\frac{x}{y} + y\right)^2 - 2\left(\frac{x}{y} + y\right) - 3 = 0\frac{x}{y} + y = 3$$

arba $\frac{x}{y} + y = -1$.

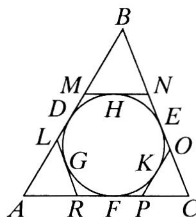
Kai $\frac{x}{y} + y = 3$, tai iš (1) lygties $\sqrt{x^2+1} = x - 3$, bet ši lygtis sprendinių neturi.

Kai $\frac{x}{y} + y = -1$, tai iš (1) lygties $\sqrt{x^2+1} = x + 1 \Rightarrow x^2 + 1 = x^2 + 2x + 1 \Leftrightarrow x = 0$. Tada iš duotosios sistemos antros lygties $y = 0$ arba $y = -1$, bet pirmą lygtį tenkina tik sprendinys $(0; -1)$.

Atsakymas. $(0; -1)$.

193. *Pirmas būdas.* Atkirstieji trikampiai (žr. pav.) panašūs duotajam, todėl $r_A : r = (h_A - 2r) : h_A$, čia h_A — trikampio ABC aukštinė, išvesta iš viršūnės A. Panašiai $r_B : r(h_B - 2r) : h_B$, $r_C : r = (h_C - 2r) : h_C$. Taigi

$$\frac{r_A + r_B + r_C}{r} = \frac{h_A - 2r}{h_A} + \frac{h_B - 2r}{h_B} + \frac{h_C - 2r}{h_C} = 3 - \frac{(a+b+c)r}{S_{ABC}} = 3 - \frac{2S_{ABC}}{S_{ABC}} = 1.$$



Antras būdas. Šešiakampio $LMNOPR$ kas antra kraštinių sumos lygios (tai teisinga bet kuriam $2n$-kampiui, apibrėžtam apie apskritimą), nes į abi sumas įeina lygios liestinės $LD = LG$, $MD = MH$, $NH = NE$, $OE = OK$, $PK = PF$, $RF = RG$, taigi

$$LM + NO + PR = RL + MN + OP.$$

Pridėję prie abiejų pusių $RA + AL + ML + BN + OC + GP$, gauname lygybę

$$AB + BC + CA = (RA + AL + LR) + (MB + BN + NM) + (OC + CP + PO).$$

Vadinasi, trikampio ABC perimetras lygus trikampių RAL, MBN ir OCP perimetrų sumai. Bet visi keturi trikampiai panašūs, todėl iš pastarosios lygybės ir gauname reikiamą lygybę.

194. $(a^2+2b^2)(c^2+2d^2) = a^2c^2+4b^2d^2+2(a^2d^2+b^2c^2) = (a^2c^2+4acbd+4b^2d^2)+2(a^2d^2-2acbd+b^2c^2) = (ac+2bd)^2+2(ad-bc)^2$.

195. Duotojo skaičiaus skaitmenų suma lygi $21n$, todėl ieškomieji skaičiai turi dalytis iš 7. Kampu dalydami „begalinį" skaičių 1992 1992 1992 1992... iš 7 pastebime, kad 1992 ir 1992 1992 nesidalija iš 7, o 1992 1992 1992 dalijasi. Dalydami toliau matome, kad visi skaičiai kartojasi, taigi duotasis skaičius dalijasi iš 7 tada ir tik tada, kai n dalijasi iš 3.

Kai n lygus 3, 6, 9, 12 arba 18, tai duotojo skaičiaus skaitmenų suma atitinkamai lygi $7\cdot 9$, $2\cdot 7\cdot 9$, $7\cdot 27$, $4\cdot 7\cdot 9$ arba $2\cdot 7\cdot 27$. Visi šie penki duotieji skaičiai dalijasi iš 4 (nes dviženklė galūnė 92 dalijasi iš 4). Visi jie dalijasi iš 7, nes n dalijasi iš 3. Visi jie dalijasi iš 9, nes jų skaitmenų suma dalijasi iš 9. Dabar atsargiai! Jei skaičiaus skaitmenų suma dalijasi iš 27, tai pats skaičius gali ir nesidalyti iš 27, pavyzdžiui, 1899. Tačiau, kai $n = 9$ arba 18, tai padaliję duotąjį skaičių iš 1992 1992 1992, kuris dalijasi iš 9, gauname dalmenį, kurio 3 arba 6 skaitmenys — vienetai, o visi kiti — nuliai, taigi dalmuo dar dalijasi iš 3. Vadinasi, kai $n = 3, 6, 9, 12$ arba 18, tai duotasis skaičius dalijasi iš savo skaitmenų sumos, o jei $n = 15$, tai nesidalija, nes duotasis skaičius nesidalija iš 5.

Atsakymas. 3, 6, 9, 12, 18.

196. Kadangi sprendiniai egzistuoja, tai $b^2-4ac \geqslant 0$. Pagal Vijeto teoremą $x_1+x_2 = -\frac{b}{a}$, o $x_1x_2 = \frac{c}{a}$. Kai $c \neq 0$, tai

$$\frac{1}{x_1^3}+\frac{1}{x_2^3} = \frac{x_1^3+x_2^3}{(x_1x_3)^3} = \frac{(x_1+x_2)^3-3x_1x_2(x_1+x_2)}{(x_1x_2)^3} = \frac{\left(-\frac{b}{a}\right)^3-\frac{3c}{a}\cdot\left(-\frac{b}{a}\right)}{\left(\frac{c}{a}\right)^3} = \frac{3abc-b^3}{c^3}.$$

Kai $c = 0$, tai duotasis reiškinys neturi prasmės.

Atsakymas. $\frac{3abc-b^3}{c^3}$, kai $c \neq 0$ (ir $b^2-4ac \geqslant 0$).

197. Iš $n+1$ akmenėlio išrinkti sunkiausią (arba lengviausią) užtenka n svėrimų: sakykime, sunkesnįjį iš pirmųjų dviejų lyginame su trečiuoju, sunkesnįjį iš jų — su ketvirtuoju ir t. t.

$2n+2$ akmenėlių suskirstome į $n+1$ porą ir $n+1$ svėrimu nustatome kiekvienos poros sunkesnįjį ir lengvesnįjį akamenėlį. Dabar n svėrimais iš $n+1$ sunkesniųjų akmenėlių nustatome sunkiausiąjį ir n svėrimais iš $n+1$ lengvesniųjų akmenėlių — lengviausiąjį. Taigi užtenka $n+1+n+n = 3n+1$ svėrimų.

Pastaba. Sąlygoje nepasakyta, kad sunkiausias ir lengviausias akmenukas vieninteliai. Jei sakysime, visi akmenukai vienodo svorio, tai visai neaišku, ką reiškia išrinkti iš jų sunkiausią. Todėl pravartu būtų papildyti sąlygą, pavyzdžiui, tokiu sakiniu: bet kurie du akmenėliai yra skirtingo svorio. Kita vertus, uždavinio formulavimą dalinai gelbsti tai, kad tais pačiais svėrimais galima nustatyti visus lygius sunkiausiuosius (kurie sunkesni už kitus) ir visus lygius lengviausiuosius akmenėlius. Iš tikrųjų, kai svarstyklės pusiausviros, tai reikia imti bet kurį akmenėlį. Nustačius vieną iš lygių sunkiausiųjų (arba lengviausiųjų) reikia surinkti visus akmenėlius, su kuriais jis buvo lyginamas ir buvo vienodo svorio; po to surinkti visus akmenėlius, su kuriais anksčiau išrinkti lygūs sunkiausieji akmenėliai buvo lyginami ir buvo vienodo svorio, ir t. t. Aišku, kad taip surinksime visus lygius sunkiausiuosius akmenėlius.

198. Pagal kosinusų teoremą

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc\cos A, \qquad c^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos C.$$

Atėmę vieną lygybę iš kitos, gauname $a^2 - c^2 = ab\cos C - bc\cos A$. Todėl $a^2 + bc - c^2 = 0 \Leftrightarrow -bc = ab\cos C - bc\cos A \Leftrightarrow c(\cos A - 1) = a\cos C \Leftrightarrow (\cos A - 1)\sin C \cdot \frac{c}{\sin C} = \cos C \sin A \cdot \frac{a}{\sin A} \Leftrightarrow$ (pagal sinusų teoremą) $\Leftrightarrow (\cos A - 1)\sin C = \cos C \sin A \Leftrightarrow \sin(C - A) = \sin C \Leftrightarrow$ (kadangi A ir C — trikampio kampai) $\Leftrightarrow C - A + C = 180^\circ \Leftrightarrow 2(180^\circ - A - B) - A = 180^\circ \Leftrightarrow 180^\circ = 3A + 2B$.

199. Žr. [1], 685, plg. 578 uždavinius.

200. Kai $a = 73$, tai $a^2 - 74a + 73 = (a - 73)a - (a - 73) = 0$, todėl duotasis reiškinys lygus

$$(a^2 - 74a + 73)(a^{29} + a^{27} + \cdots + a^{15}) + 15 = 15.$$

Atsakymas. 15.

201. Duotoji lygtis ekvivalenti lygčiai

$$[x] - \{x\} - \left(\frac{1}{\{x\}} - \frac{1}{[x]}\right) = 0 \iff ([x] - \{x\})\left(1 - \frac{1}{\{x\}[x]}\right) = 0 \Rightarrow [x] = \{x\}$$

arba

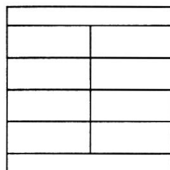
$$\{x\}[x] = 1.$$

Kadangi $0 \leqslant \{x\} < 1$, tai $[x] = \{x\} \Leftrightarrow [x] = \{x\} = 0$, bet reikšmė $x = 0$ neįeina į pradinės lygties apibrėžimo sritį. Kai $\{x\}[x] = 1$, tai $0 < \{x\} < 1$, ir $[x] > 1$. Gauname $x = k + \frac{1}{k}$, kai k bet kuris natūralusis skaičius, didesnis už 1. Patikriname, — tinka.

Atsakymas. $k + 1 + \frac{1}{k+1}$, $k \in N$.

202. Kadangi $\angle EOD = \angle AOC = 180^\circ - \frac{A}{2} - \frac{C}{2} = 90^\circ + \frac{180^\circ - A - C}{2} = 90^\circ + \frac{B}{2} = 120^\circ$, tai $\angle OEB + \angle ODB = 360^\circ - B - \angle EOD = 180^\circ$. Todėl $\angle OEB = \angle ODC$. Be to, taškas O vienodai nutolęs nuo tiesių AB ir BC, nes BO — kampo B pusiaukampinė. Vadinasi, $EO = DO$.

203. Veskime n „horizontalių" kelių taip, kad atstumas tarp bet kurių gretimų kelių būtų lygus $\frac{1000}{n}$, o atstumas tarp kraštinių kelių ir artimiausios „horizontalios" valstybės sienos — $\frac{1000}{2n}$ km, ir sujunkime juos $1000\left(1 - \frac{1}{n}\right)$ km ilgio „vertikaliu" keliu (žr. pav.). Aišku, kad kiekvieno valstybės miesto atstumas iki artimiausiojo iš šių kelių ne didesnis už $\frac{1000}{2n}$ km.



Taigi statmenai sujungę kiekvieną miestą su artimiausiu keliu, gausime iš viso $1000n + 1000(1 - \frac{1}{n}) + 1000 \cdot \frac{51}{2n} = 1000((n + 1) + \frac{49}{2n})$ km. Trumpiausias tokio kelių tinklo ilgis bus, kai $n = 5$. Tada visų kelių ilgių suma lygi $1000 \cdot 10{,}9 < 11\,000$.

Atsakymas. Galima.

204. Sakykime, kad iš pradžių skruzdėlė buvo spindulio S_1 taške A, po to pateko į spindulio S_2 tašką B, o apėjus ratą — į spindulio S_1 tašką C. Tada $OB = OA\frac{\sqrt{3}}{2}$, $AB = \frac{OA}{2}$. Aišku, kad $OC = OA\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^{12} = OA \cdot \frac{3^6}{4^6}$. Iš panašių figūrų išplaukia, kad antrą ratą ji apeis per $\frac{3^6}{4^6}$ minučių ($\approx 10{,}7$ sekundės), o iki taško O nueis

$$a\left(1+\frac{3^6}{4^6}+\frac{3^{12}}{4^{12}}+\frac{3^{18}}{4^{18}}+\cdots\right)=\frac{a}{1-3^6/4^6}$$

($\approx 1{,}22a$) metrų.

Atsakymas. $\frac{3^6}{4^6}$ minučių, $\frac{a}{1-3^6/4^6}$ metrų.

XLII OLIMPIADA (1993 m.)

205. Pažymėkime $b + c = A$, $b - a = 2D$. Tada $c + b = 2A$, $c - b = 2D$, $c = A + D$, $b = A - D$, $a = A - 3D$, $d - c = 2D$, $d = A + 3D$. Lygtis virsta

$$\frac{1}{x+A-3D}+\frac{1}{x+A-D}+\frac{1}{x+A+D}+\frac{1}{x+A+3D}=0,$$
$$\frac{2(x+A)}{(x+A)^2-9D^2}+\frac{2(x+A)}{(x+A)^2-D^2}=0,$$
$$4(x+A)\frac{(x+A)^2-5D^2}{\big((x+A)^2-9D^2\big)\big((x+A)^2-D^2\big)}=0.$$

Viena šios šaknis galėtų būti $x = -A$, tik reikia patikrinti, ar trupmenos vardiklis su šia reikšme nevirsta nuliu. Matome, kad taip yra, kai $D = 0$. Čia kyla tokia dilema: jei $D = 0$, tai visi skaičiai a, b, c, d lygūs. Jei laikysime, kad lygūs skaičiai sudaro aritmetinę progresiją, tai pradinė lygtis

$$\frac{4}{x+a}=0$$

sprendinių neturi. Bet jei laikysime, kad aritmetinės progresijos skirtumas negali būti lygus nuliui, tai $D \neq 0$. Tada duotosios lygties sprendiniai yra $-A - D\sqrt{5}$, $-A$, $-A + D\sqrt{5}$ ir iš tikrųjų sudaro aritmetinę progresiją.

Išvada. Vadovėliuose aritmetinės progresijos apibrėžimai įvairuoja. Jei pasirinktas toks aritmetinės progresijos apibrėžimas, kad jos skirtumas gali būti lygus 0, tai teiginys neteisingas. Jei pasirinktas toks aritmetinės progresijos apibrėžimas, kad jos skirtumas negali būti lygus nuliui, tai teiginys teisingas.

206. *Pirmas būdas.* Kadangi nelygybė nesikeičia sukeitus vietomis bet kuriuos du kintamuosius, tai galime laikyti, kad $a < b < c < d$. Tada kairė pusė mažesnė už $6cd$, ir nelygybė įrodyta, kai $6cd \leqslant 2abcd$, t. y. kai $ab \geqslant 3$. Liko įrodyti nelygybę, kai $ab \leqslant 2$, t. y. $a = 1$, $b = 2$. Tada

$$2 + 3c + 3d < 3cd,$$
$$3(c-1)(d-1) > 5.$$

Bet pastaroji nelygybė akivaizdi, nes $c \geqslant 3$, $d \geqslant 4$.

Antras būdas. Pradinė nelygybė ekvivalenti tokiai:

$$\frac{1}{cd}+\frac{1}{ad}+\frac{1}{ab}+\frac{1}{bc}+\frac{1}{bd}+\frac{1}{ac}<2. \qquad (1)$$

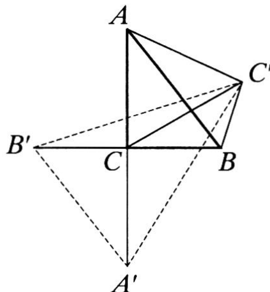
Laikykime, kad $a<b<c<d$. Tada $a\geqslant 1$, $b\geqslant 2$, $c\geqslant 3$, $d\geqslant 4$, todėl (1) nelygybės kairė pusė ne mažesnė už

$$\frac{1}{1\cdot 2}+\frac{1}{1\cdot 3}+\frac{1}{1\cdot 4}+\frac{1}{2\cdot 3}+\frac{1}{2\cdot 4}+\frac{1}{3\cdot 4}=$$
$$=\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{6}+\frac{1}{8}+\frac{1}{12}=\frac{35}{24}<2.$$

Įrodėme net tikslesnę nelygybę

$$ab+bc+cd+da+ac+bd\leqslant\frac{35}{24}abcd.$$

207. Trikampį $A'B'C'$ (žr. pav.) sudaro trys trikampiai: $\triangle A'B'C$ (jis lygus $\triangle ABC$, todėl jo plotas lygus 1), $\triangle C'CB'$ ir $\triangle C'CA'$. Bet $S_{\triangle C'CB'}=S_{\triangle C'CB}$, nes trikampių pagrindai lygūs ($CB'=CB$) ir aukštinė iš viršūnės C' bendra. Lygiai taip pat $S_{\triangle C'CA'}=S_{\triangle C'CA}$, nes $CA'=CA$, o viršūnė C' bendra. Todėl $\triangle C'CB'$ ir $\triangle C'CA'$ plotų suma lygi keturkampio $ACBC'$ plotui. Pastarojo plotas lygus 2, nes jį sudaro du lygūs trikampiai: $\triangle ABC$ ir $\triangle ABC'$. Taigi $\triangle A'B'C'$ plotas lygus 3.



Atsakymas. 3.

208. Įsivaizduokime, kad visa plokštuma subraižyta langeliais, kurių kraštinė lygi kubo briaunai, o kubas nudažytąja siena stovi ant plokštumos. Aišku, kad užtenka nurodyti, kaip reikia vartyti kubą, kad jis atsirastų nudažytąja siena gretimame langelyje (sakysime, langelyje į dešinę). Tam pakanka kubą paversti tolyn (kad nudažytoji siena būtų priekinė), po to paversti jį į dešinę (nudažytoji siena liks priekinė), ir pagaliau paversti jį artyn.

Kadangi mokame nudažyti bet kurį gretimą langelį, tai galime nudažyti ir bet kurį norimą langelį, taigi ir visą plokštumą.

209. Sunumeruokime lentelės skaičius taip: pirmą eilutę a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14}, antrą eilutę a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24} ir t. t. Suskirstykime skaičius į 3 grupes: kampinius (a_{11}, a_{14}, a_{41}, a_{44}), kraštinius (a_{12}, a_{13}, a_{21}, ...) ir centrinius (a_{22}, a_{23}, a_{32}, a_{33}). Kadangi visos operacijos simetriškos centro atžvilgiu, tai tos pačios grupės skaičiai vienodai eina į galutinę sumą.

Po pirmo žingsnio gausime lentelę $b_{11}, b_{12}, \ldots$. Tarp šių skaičių a_{11} įeina tik į b_{11}. Po antro žingsnio a_{11} įeis tik į c_{11}, taigi į galutinę sumą a_{11} įeis tik vieną kartą.

Skaičius a_{21} po pirmo žingsnio įeis tik į b_{11} ir b_{21}, todėl į c_{11} įeis 2 kartus, į c_{21} — 1 kartą, taigi į sumą S įeis 3 kartus.

Skaičius a_{22} po pirmo žingsnio įeis į $b_{11}, b_{12}, b_{21}, b_{22}$, po antro žingsnio — į c_{11} įeis 4 kartus, į c_{12} ir c_{21} — po 2 kartus, į c_{22} — 1 kartą, todėl į sumą S įeis 9 kartus.

Taigi $S = 9(a_{22} + \cdots) + 3(a_{21} + \cdots) + (a_{11} + \cdots)$.

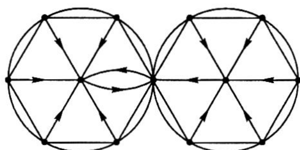
Iš šios išraiškos aišku, kad į centrinius langelius reikia (bet kaip) surašyti didžiausius skaičius 16, 15, 14, 13, į kampinius langelius — 1, 2, 3, 4, o likusius skaičius — į kraštinius langelius. Tada ieškomoji suma bus lygi

$$9(16 + 15 + 14 + 13) + 3(12 + 11 + 10 + 9 + 8 + 7 + 6 + 5) + (4 + 3 + 2 + 1),$$

t. y. 736.

Atsakymas. Į 4 centrinius langelius reikia bet kaip surašyti didžiausius skaičius 16, 15, 14, 13, į kampinius langelius — mažiausius skaičius 1, 2, 3, 4, į kraštinius — bet kaip surašyti likusius skaičius.

210. Pradėkime nuo dviejų plėšikų — aišku, kad tada bus 2 nušauti. Nesunku suvokti, kad net 7 plėšikus pastačius į taisyklingojo šešiakampio viršūnes ir jo centrą, gali atsitikti, kad tik 2 bus nušauti (visi viršūnėse esantys plėšikai turi šauti į esantį centre, o centrinis nušaus vieną plėšiką iš esančių viršūnėse). Todėl jei plėšikus padalytume į 2 atskiras grupes — 7 ir 6 plėšikus — ir kiekvieną iš grupių išdėstytume dideliu atstumu vienas nuo kito esančiuose šešiakampiuose, tai galėtų būti tik 4 nušauti. Bet dar geriau tuos du šešiakampius imti su bendra viršūne. Taigi imkime du lygius besiliečiančius apskritimus.

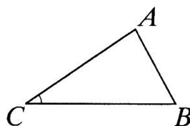


Į kiekvieną iš jų įbrėžiame taisyklingąjį šešiakampį taip, kad viena šešiakampio viršūnė būtų būtų lietimosi taške. Tada šešiakampių viršūnėse ir centruose sutalpiname 13 plėšikų. Šešiakampio viršūnėje esantis plėšikas gali šauti į centre esantį plėšiką, o abu centruose esantys plėšikai — į lietimosi taške (abiejų šešiakampių bendroje viršūnėje) esantį plėšiką. Tada bus tik 3 nušauti plėšikai.

Dabar mums liko įrodyti, kad plėšikų negalima išdėstyti taip, kad nušautų būtų tik 2. Pasinaudosime vienu paprastu geometrijos faktu, kurį išskirsime į atskirą lemą.

Lema. *Jeigu trikampio ABC kampas C mažesnis už* $60°$, *tai bent viena iš jį sudarančių kraštinių AC ir BC yra ilgesnė už AB. Jeigu kampas C lygus* $60°$, *o kraštinės AC ir BC nelygios, tai vėl bent viena iš jų yra ilgesnė už AB (jeigu $AC = BC$, tai $AC = BC = AB$).*

Lemos įrodymas. Kai $C < 60°$ (žr. pav.), tai $A + B > 120°$, todėl bent vienas iš kampų A ir B didesnis už $60°$, taigi ir už C.



Kadangi didesnį kampą atitinka didesnė kraštinė, tai bent viena iš kraštinių AC ir BC yra ilgesnė už AB.

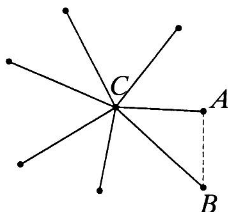
Kai $C = 60°$, tai $A + B = 120°$. Bet $AC \neq BC$, todėl $A \neq B$, taigi ir vėl vienas iš kampų didesnis už C.

Lema įrodyta.

Remdamiesi šia lema, įrodysime, jog 13 plėšikų negalima išdėstyti taip, kad nušautų būtų tik 2.

Tarkime priešingai — sakykime, kad pavyko taip išdėstyti plėšikus, kad po susišaudymo buvo ne daugiau kaip 2 nušauti. Kadangi buvo iššauta 13 kulkų, tai bent vienam plėšikui teko ne mažiau kaip 7 kulkos.

Įrodysime, kad tai neįmanoma. Imkime plėšiką C, kuriam teko 7 kulkos. Išveskime iš taško C spindulius per šovusius į jį plėšikus. Viename spindulyje 2 plėšikų būti negali — abu jie negalėtų šauti į C.



Tie 7 spinduliai (žr. pav.) sudaro 7 kampus, kurių suma lygi 360°. Vadinasi, atsiras kampas, mažesnis už 60°. Nagrinėkime trikampį CAB, kurį sudaro 3 plėšikai: C ir to kampo kraštinėse esantys plėšikai A ir B. Remiantis lema, kraštinė AB yra trumpesnė už bent vieną iš kraštinių CA ir CB, todėl bent vienas iš plėšikų A ir B negalėjo šauti į C. Prieštara. (Beje, įrodėme net šiek tiek daugiau: plėšikų negalima išdėstyti taip, kad į vieną iš jų galėtų šauti bent 7 plėšikai, nors nebūtinai į jį šautų.)

Taigi mažiausias nušautų plėšikų skaičius yra 3.

Atsakymas. Iš 13 plėšikų mažiausiai galėjo būti nušauti 3.

211. Žr. 209 uždavinį.

212. Patyrinėkime, kokias reikšmes galėtų įgyti nagrinėjamasis santykis Q. Jeigu $a = b = c$, tai $Q = 1$. Mėginkime imti lygias tik dvi kraštines: $b = c = 1$. Tada $Q = a(2 - a) = 1 - (1 - a)^2$. Pagal trikampio nelygybę $0 < a < 2$, ir santykis Q įgyja tik reikšmes iš intervalo $(0; 1]$. Dabar įrodysime, kad *visiems* trikampiams $Q \leqslant 1$. Kadangi

$$(a + b - c)(a + c - b) = a^2 - (b - c)^2 \leqslant a^2,$$
$$(a + c - b)(b + c - a) = c^2 - (a - b)^2 \leqslant c^2,$$
$$(b + c - a)(a + b - c) = b^2 - (a - c)^2 \leqslant b^2,$$

tai sudauginus

$$(a+b-c)^2(a+c-b)^2(b+c-a)^2 \leqslant a^2b^2c^2,$$
$$(a+b-c)(a+c-b)(b+c-a) \leqslant abc,$$

t. y. $Q \leqslant 1$.

Kadangi iš trikampio nelygybės išplaukia, kad $Q > 0$, tai įrodėme, kad Q gali įgyti tik reikšmes iš intervalo $(0; 1]$. Įsitikinsime, kad kiekviena iš šių reikšmių įgyjama. Tam pakanka nagrinėti trikampius su kraštinėmis 1, 1 ir a $(0 < a \leqslant 1)$. Tada norint gauti $Q = x$ $(0 < x \leqslant 1)$, užtenka imti trikampį su kraštinėmis 1, 1, $1 - \sqrt{1-x}$.

Atsakymas. Kiekvieną reikšmę iš intervalo $(0; 1]$.

213. Jei x ir y neigiami, tai $z > 1$, ir reikiama nelygybė akivaizdi. Vadinasi, galima laikyti, kad $y \geqslant 0$ ir $z \geqslant 0$.

Tada

$$1 \leqslant (x+y+z)^2 = x^2 + y^2 + z^2 + 2xy + 2xz + 2yz \leqslant$$
$$\leqslant x^2 + y^2 + z^2 + 2y^2 + 2z^2 + 2z^2 = x^2 + 3y^2 + 5z^2.$$

214. *Pirmas būdas.* Į c) statome $y = 0$:

$$((x+1) * 0) + (x * 1) = 3(x0).$$

Remdamiesi sąlyga a), turime $x + 1 + (x * 1) = 3x$,

$$x * 1 = 2x - 1. \tag{1}$$

Dabar į lygybę c) statome $y = 1$:

$$((x+1) * 1) + (x * 2) = 3(x * 1) - x + 2,$$

ir, remiantis (1),

$$2(x+1) - 1 + (x * 2) = 3(2x-1) - x + 2,$$
$$x * 3 = 3x - 2. \tag{2}$$

Dabar į c) statome $y = 2$:

$$((x+1) * 2) + (x * 3) = 3(x * 2) - 2x - 2x + 4,$$

ir, remiantis (2),

$$3(x+1) - 2 + (x * 3) = 9x - 6 - 2x + 4,$$
$$x * 3 = 4x - 3. \tag{3}$$

Žiūrint į (1)–(3) lygybes, kyla mintis, kad visiems natūraliesiems n teisinga lygybė

$$x * n = (n+1)x - n. \tag{4}$$

Įrodysime šį teiginį matematinės indukcijos metodu. Kai $n = 1$, teiginys teisingas. Tarkime, kad (4) teiginys teisingas, kai $n = k$, t. y.

$$x * k = (k+1)x - k. \tag{5}$$

Įrodysime, kad tada jis teisingas, ir kai $n = k + 1$, t. y. įrodysime, kad

$$x * (k+1) = (k+2)x - k - 1. \tag{6}$$

Į sąlygą c) įstatykime $y = k$:

$$((x+1) * k) + (x * (k+1)) = 3(x * k) - xk + 2k.$$

Remiantis (5) lygybe,

$$(k+1)(x+1) - k + (x * (k+1)) = 3(kx + x - k) - xk + 2k,$$
$$x * (k+1) = kx + 2x - k - 1,$$

t. y. gavome (6) lygybę. Remiantis matematinės indukcijos aksioma: (4) teiginys įrodytas.

Dabar į (4) lygybę statome $x = 19$, $n = 93$:

$$19 * 93 = 94 \cdot 19 - 93 = 94 \cdot 20 - 187 = 1880 - 187 = 1693.$$

Antras būdas. Mums čia patogiau bus kalbėti ne apie veiksmą $*$, kuris reikšmių x ir y porai priskiria tam tikrą skaičių, o apie funkciją $f(x, y)$ (tai, žinoma, viena ir tas pat). Tada uždavinys atrodo taip:

Sveikųjų skaičių porų $(x; y)$ aibėje apibrėžta funkcija $f(x, y)$, turinti šias savybes:

a) $f(x, 0) = x$,

b) $f(0, y) = -y$,

c) $f(x+1, y) + f(x, y+1) = 3(f(x, y) - xy + 2y)$.

Raskite $f(19, 93)$.

Iš sąlygos a) matome, kad įvedus funkciją

$$f_1(x, y) = f(x, y) - x$$

(tai labai panašu į mokyklinį naujo kintamojo įsivedimą) tai bent jau sąlyga a) naujajai funkcijai f_1 supaprastėja ir atrodo taip: $f_1(x, 0) = 0$. Lygiai taip pat iš b) aišku, kad prie $f(x, y)$ verta pridėti y.

Sąlyga c) perša mintį, kad būtų verta atimti xy (juo labiau, kad tai neturi įtakos sąlygų a) ir b) išvaizdai), — tada sąlygoje c) išnyktų „nemaloni“ sandauga xy. Tad nagrinėkime funkciją $g(x, y) = f(x, y) - xy - x + y$. (Suprantama, iš anksto žinant (5) sąsają, kuri reiškia, kad $f(x, y) = xy + x - y$, nebereikia galvoti, kaip reikia „pataisyti“ funkciją $f(x, y)$.) Įstatę $f(x, y) = g(x, y) + xy + x - y$ į sąlygas a), b), c), gauname:

a) $g(x, 0) + x = x$,

b) $g(0, y) - y = -y$,

c) $g(x+1, y) + (x+1)y + x + 1 - y + g(x, y+1) + x(y+1) + x - y - 1 = 3g(x, y) + 3xy + 3x - 3y - xy + 2y$,

t. y.

a) $g(x, 0) = 0$,

b) $g(0, y) = 0$,

c) $g(x + 1, y) + g(x, y + 1) = 3g(x, y)$.

Funkcijos $g(x, y)$ radimo iš pastarųjų sąlygų uždavinys ekvivalentus senojo uždavinio sprendimui: jei turime $f(x, y)$, tai vienareikšmiškai randame $g(x, y)$, o jei radome $g(x, y)$, tai gauname ir $f(x, y)$.

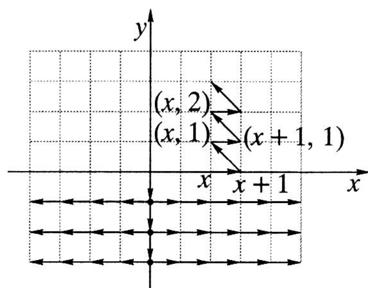
Funkciją $g(x, y)$ dabar rasti paprasta. Statome $y = 0$ į c), tada remiantis a) $g(x+1, 0) = 0$ ir $g(x, 0) = 0$, todėl $g(x, 1) = 0$. Vėl statome $y = 1$ į c), tada $g(x+1, 1)$ ir $g(x, 1) = 0$, todėl ir $g(x, 2) = 0$. Tęsdami gauname $g(x, n) = 0$ bet kuriam neneigiamam sveikajam n.

Dabar statome $y = -1$ į c), tada $g(x + 1, -1) = 3g(x, -1)$. Iš šios lygybės nustatome $g(x, -1)$ pavidalą: kadangi remiantis b) $g(0, -1) = 0$, tai ir $g(1, -1) = 0$, tada ir $g(2, -1) = 0$ ir t. t., t. y. $g(n, -1) = 0$. Kita vertus, $g(-1, -1) = g\frac{0,-1}{3} = 0$, tada $g(-2, -1) = 0$, $g(-3, -1) = 0$ ir t. t., t. y. $g(-n, -1) = 0$. Įrodėme, kad $g(x, -1) = 0$ visiems sveikiesiems x.

Lygiai taip pat dabar įrodome, kad $g(x, -2) = 0$: imame $y = -2$ sąlygoje c), tada $g(x + 1, -2) = 3g(x, -2)$, o tai, kaip jau matėme, reiškia, kad $g(x, -2) = 0$ visiems sveikiesiems x.

Tęsdami gauname, kad $g(x, -m) = 0$ visiems natūraliesiems m. Taigi įrodėme, kad $g(x, y) = 0$ visiems sveikiesiems y.

Kadangi $g(x, y) = 0$, tai $f(x, y) = g(x, y) + xy + x - y = xy + x - y$ visoms sveikųjų skaičių x ir y poroms. Beje, čia atlikome tą pačią lygiagrečiąją indukciją, tik kadangi „pradinės“ sąlygos nulinės, tai viskas supaprastėja tiek, kad net ir beatpažinti tą patį metodą sunku. Schemiškai įrodymo eiga pavaizduota paveikslėlyje.

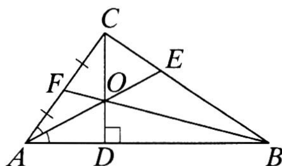


Matome, kad viršutinėje pusplokštumėje ($y \geqslant 0$) „žingsniuojame“ skirtingai nei apatinėje ($y < 0$).

Atsakymas. 1693.

215. Žr. 214 uždavinį.

216. Trikampyje ABC (žr. pav.) AE — pusiaukampinė, BF — pusiaukraštinė, CD — aukštinė, ir visos jos kertasi taške O.



Iš trikampio ADC gauname $AD = b\cos A$ (nes CD — aukštinė), tada iš trikampio AOD turime (remdamiesi tuo, kad AE — pusiaukampinė)

$$OD = b\cos A \operatorname{tg}\frac{A}{2}.$$

Dabar jau nesunku rasti kampą $\varphi = \angle OBD$, ir galima pritaikyti sinusų teoremą trikampiui AFB (kadangi BF pusiaukraštinė, tai $AF = \frac{b}{2}$).

Iš trikampio CDB gauname $BD = a\cos B$, taigi

$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{OD}{BD} = \frac{b\cos A \operatorname{tg}\frac{A}{2}}{a\cos B}. \tag{1}$$

Galime laikyti, jog kampą φ žinome, tad taikome sinusų teoremą trikampiui AFB:

$$\frac{c}{\sin(180^\circ - (A+\varphi))} = \frac{b}{2\sin\varphi}. \tag{2}$$

Dabar užtenka eliminuoti iš (1) ir (2) sąsajų φ. Tai padaryti nesunku. Iš (2)

$$2c\sin\varphi = b\sin(A+\varphi),$$
$$2c\sin\varphi = b\sin A\cos\varphi + b\cos A\sin\varphi,$$
$$2c\operatorname{tg}\varphi = b\sin A + b\cos A\operatorname{tg}\varphi,$$
$$\operatorname{tg}\varphi = \frac{b\sin A}{2c - b\cos A} \tag{3}$$

(aišku, kad $b\cos A = AD < AB < 2c$). Sulyginę (1) ir (3) $\operatorname{tg}\varphi$ išraiškas, gauname

$$\cos A\operatorname{tg}\frac{A}{2}(2c - b\cos A) = a\sin A\cos B.$$

Kadangi kraštinės proporcingos atitinkamų kampų sinusams, tai

$$\cos A\operatorname{tg}\frac{A}{2}(2\sin C - \sin B\cos A) = \sin^2 A\cos B.$$

Bet $\operatorname{tg}\frac{A}{2} = \frac{\sin A}{1+\cos A}$ ir $A + B = 180^\circ - C$, todėl

$$\cos A(2\sin C - \sin B\cos A) = \sin A\cos B(1+\cos A),$$
$$2\cos A\sin C - \cos A(\cos A\sin B + \sin A\cos B) = \sin A\cos B,$$
$$2\cos A\sin C - \cos A\sin(A+B) = \sin A\cos B,$$
$$2\cos A\sin C - \cos A\sin C = \sin A\cos B,$$
$$\cos A\sin C = \sin A\cos B,$$
$$\operatorname{tg}A = \frac{\sin C}{\cos B}.$$

217. Užrašykime progresijos $a_1, a_2, \ldots, a_{16}$ narius kaip $a, aq, aq^2, \ldots, aq^{15}$ ir apytiksliai nustatykime, koks gali būti q. Kadangi pagal sąlygą pirmi 5 skaičiai devynženkliai, $a \geqslant 10^8$ ir $aq < 10^9$, tai $10^9 > aq^4 \geqslant 10^8q^4$, $q^4 < 10$, $q < 2$. Kadangi penkioliktas skaičius dvylikaženklis, tai $10^{11} \leqslant aq^{14} = aq^4 \cdot q^{10} < 10^9q^{10}$. Todėl $q^{10} \geqslant 10^2$, $q^5 \geqslant 10$, $(2q)^5 \geqslant 320 \Rightarrow 2q > 3$, $q > 1{,}5$.

Taigi nustatėme, kad

$$1{,}5 < q < 2 \tag{1}$$

(iš tikrųjų galima gauti tikslesnius rėžius, bet šitų mums visiškai užtenka).

Dabar remkimės tuo, kad duotieji skaičiai — natūralieji. Kadangi $q = \frac{a_2}{a_1}$, tai suprastinę iš bendrų daugiklių, galime parašyti $q = \frac{m}{n}$, o m ir n neturi bendrų daliklių. Bet tada $aq^{15} = \frac{am^{15}}{n^{15}}$, ir kadangi tai sveikasis skaičius, tai a turi dalytis iš n^{15}, $a = kn^{15}$ (k — natūralusis).

Kadangi $a < 10^9$, tai $kn^{15} < 10^9$, $n^{15} < 10^9$, $n^5 < 1000$, $n < 4$. Taigi $q = \frac{m}{n}$ vardiklis n galėtų būti tik $n = 1$, $n = 2$, $n = 3$.

Grįžkime prie (1) nelygybės. Kai $n = 1$, tai ji duoda $1{,}5 < m < 2$, ir sveikųjų sprendinių neturi. Kai $n = 2$, tai $1{,}5 < \frac{m}{2} < 2$, $3 < m < 4$, ir vėl sveikųjų sprendinių nėra. Lieka tik $n = 3$, tada iš (1) $1{,}5 < \frac{m}{3} < 2$, $4{,}5 < m < 6$, t. y. $m = 5$. Vadinasi, ieškomosios geometrinės progresijos vardiklis q galėtų būti lygus tik $\frac{5}{3}$.

Jau matėme, kad $a = kn^{15}$, t. y. $a = 3^{15}k$. Nustatykime, koks gali būti k. Kadangi $a > 10^8$, tai $3^{15}k > 10^8$, ir $k > 6$. Kadangi $a_{10} < 10^{10}$, tai $aq^9 = 3^{15}k\left(\frac{5}{3}\right)^9 < 10^{10}$, ir $k < \frac{2^{10} \cdot 5}{3^6} < 8$. Nustatėme, kad k gali būti lygus tik 7, taigi progresijos pirmas narys būtų $7 \cdot 3^{15}$, o vardiklis $\frac{5}{3}$, ir gauname progresiją $7 \cdot 3^{15}$, $7 \cdot 5 \cdot 3^{14}$, $7 \cdot 5^2 \cdot 3^{19}$, $7 \cdot 5^3 \cdot 3^{12}$, $7 \cdot 5^4 \cdot 3^{11}$, $7 \cdot 5^5 \cdot 3^{10}$, $7 \cdot 5^6 \cdot 3^9$, $7 \cdot 5^7 \cdot 3^8$, $7 \cdot 5^8 \cdot 3^7$, $7 \cdot 5^9 \cdot 3^6$, $7 \cdot 5^{10} \cdot 3^5$, $7 \cdot 5^9 \cdot 3^4$, $7 \cdot 5^{10} \cdot 3^3$, $7 \cdot 5^{11} \cdot 3^2$, $7 \cdot 5^{12} \cdot 3$, $7 \cdot 5^{12}$. Apskaičiavę matome, kad iš tikrųjų šie skaičiai tenkina uždavinio sąlygą.

Atsakymas. 100 442 349, 167 403 915, 279 006 525, 465 010 875, 775 018 125, 1 291 696 875, 2 152 828 125, 3 588 046 875, 5 980 078 125, 9 966 796 875, 16 611 328 125, 27 685 546 875, 46 142 578 125, 76 904 296 875, 128 173 828 125, 213 623 046 875.

218. *Pirmas būdas.* Suvienodinkime rodiklius, sakysime, trejeto laipsniuose. Keliame pirmąją lygtį laipsniu x, antrąją — laipsniu y:

$$2^{x^2}3^{xy} = 6^x,$$

$$3^{xy}4^{y^2} = 12^y.$$

Deja, dalijant vieną lygtį iš kitos trejeto laipsnis neišsnyksta — jis atsirado dešinėje pusėje. Todėl verta 6 ir 12 išskaidyti dvejetų ir trejetų sandauga ir perrašyti pradinę sistemą taip:

$$2^{x-1}3^{y-1} = 1, \tag{1}$$

$$3^{x-1}2^{2(y-1)} = 1. \tag{2}$$

Dabar ankstesnę mintį įgyvendinti nesunku. Suvienodiname, pavyzdžiui, trejeto laipsnių rodiklius:

$$2^{(x-1)^2}3^{(x-1)(y-1)} = 1,$$

$$3^{(x-1)(y-1)}2^{2(y-1)^2} = 1.$$

Kadangi dešinė pusė nepakito, tai dalijant galima eliminuoti trejeto laipsnius:

$$2^{(x-1)^2-2(y-1)^2}=1.$$

Pertvarkome gautą lygtį:

$$(x-1)^2-2(y-1)^2=0, \tag{3}$$
$$x-1=\pm(y-1)\sqrt{2}. \tag{4}$$

Kai $x-1=(y-1)\sqrt{2}$, iš (1) lygties turime

$$2^{(y-1)\sqrt{2}}3^{y-1}=1, \qquad (2^{\sqrt{2}}\cdot 3)^{y-1}=1, \qquad y-1=0, \qquad y=1,$$

todėl iš (4) $x=1$. Gautas sprendinys (1; 1) tenkina pradinę sistemą.

Kai $x-1=-(y-1)\sqrt{2}$, iš (1) lygties

$$2^{-(y-1)\sqrt{2}}3^{y-1}=1, \qquad (2^{-\sqrt{2}}\cdot 3)^{y-1}=1,$$

ir vėl gauname tą patį sprendinį.

Antras būdas. Logaritmuokime lygtis pagrindu 10:

$$x\lg 2+y\lg 3=\lg 6,$$
$$x\lg 3+y\lg 4=\lg 12.$$

Gavome dviejų tiesinių lygčių sistemą. Galima spręsti ją suvienodinant koeficientus:

$$x\lg 2\lg 3+y\lg^2 3=\lg 3\lg 6,$$
$$x\lg 3\lg 2+y\lg 4\lg 2=\lg 12\lg 2.$$

Atėmę lygtis, turime

$$y(\lg^2 3-\lg 4\lg 2)=\lg 3\lg 6-\lg 12\lg 2.$$

Bet

$$\lg 3\lg 6-\lg 12\lg 2=\lg 3(\lg 2+\lg 3)-\lg 2(2\lg 2+\lg 3)=\lg^2 3-2\lg^2 2,$$

ir kadangi $\lg^2 3-2\lg^2 2\neq 0$ (priešingu atveju būtų $\lg 3=\sqrt{2}\lg 2$, $3=2^{\sqrt{2}}$, $9=2^{\sqrt{8}}$, o taip nėra, nes $2^{\sqrt{8}}<2^3=8<9$), tai $y=1$. Dabar iš pradinės sistemos randame sprendinį (1; 1).

Atsakymas. (1; 1).

219. *Pirmas būdas.* Išdėstykime krūveles pagal monetų skaičiaus didėjimą ir pažymėkime monetų skaičių jose $x_1, x_2, \ldots, x_9$ ($x_1 < x_2 < \cdots < x_9$). Imkime x_5. Jeigu $x_5 \leqslant 18$, tai $x_5+x_4+x_3+x_2+x_1 \leqslant 18+17+16+15+14 = 80$, todėl $x_6+x_7+x_8+x_9 \geqslant 90$. Jeigu $x_5 \geqslant 19$, tai $x_6 + a_7 + x_8 + x_9 \geqslant 20 + 21 + 22 + 23 = 86$. Abiem atvejais paskutinėse keturiose krūvelėse yra daugiau kaip 85 monetos.

Antras būdas. Tarkime, kad net 4 didžiausiose krūvelėse ne daugiau kaip 85 monetos. Tada

$$x_6 + x_7 + x_8 + x_9 \leqslant 85,$$
$$x_6 + x_6 + 1 + x_6 + 2 + x_6 + 3 \leqslant 85,$$
$$4x_6 \leqslant 79,$$
$$x_6 \leqslant 19.$$

Todėl $x_5 + x_4 + x_3 + x_2 + x_1 \leqslant 18 + 17 + 16 + 15 + 14 \leqslant 80$, ir iš viso monetų yra $\leqslant 165$. Prieštara.

XLIII OLIMPIADA (1994 m.)

220. Reiškinys x^2+615 yra sveikasis skaičius, todėl dvejeto laipsnis negali būti neigiamas. Beje, ir taip aišku, kad $x^2 + 615 \geqslant 615 > 2^9$, taigi dvejeto laipsnis gali būti tik $n \geqslant 10$. Kintamojo x reikšmės galėtų būti tiek teigiamos, tiek neigiamos, tiek ir 0. Bet neigiamųjų reikšmių tirti nereikia (reikšmė $x = n, n \in \boldsymbol{N}$, duoda tą patį rezultatą kaip ir $x = -n$), o $x = 0$ netinka — 615 nėra dvejeto laipsnis. Vadinasi, užtenka išspręsti lygtį

$$x^2 + 615 = 2^m \qquad (1)$$

natūraliaisiais skaičiais.

Iš karto pastebime, kad kai m lyginis, gauname kvadratų skirtumą, kurį galime išskaidyti. Taigi sakykime, kad $m = 2k$, tada $2^{2k} - x^2 = 615$,

$$(2^k - x)(2^k + x) = 615 = 3 \cdot 5 \cdot 41,$$

ir lygtį nesunku išspręsti sudarius sistemas

$$\begin{cases} 2^k - x = 1, \\ 2^k + x = 615; \end{cases} \qquad \begin{cases} 2^k - x = 3, \\ 2^k + x = 205 \end{cases}$$

ir t. t. Bet dar paprasčiau pastebėti, kad daugiklių $2^k - x$ ir $2^k + x$ suma yra 2^{k+1}, t. y. dvejeto laipsnis, todėl tikti gali tik tokia iš porų 1 ir 615, 3 ir 205, 5 ir 123, 15 ir 41, kuri duoda sumą dvejeto laipsnį. Taigi tikti gali tik 5 ir 123 ($5 + 123 = 128 = 2^7$), o sistema

$$2^k - x = 5, \quad 2^k + x = 123$$

turi sprendinį $x = 59$, $k = 6$. Taigi (1) lygtis turi sprendinį $x = 59$, $m = 12$.

Kai (1) lygtyje m nelyginis, $m = 2k + 1$, tenka ieškoti kokios nors kitos minties.

Panagrinėkime dvejeto laipsnių dešimtaines galūnes (beje, galima nagrinėti dvejeto laipsnių dalybos iš 3 ar 5, o ne iš 10, liekanas): $2^1 = 2$, $2^3 = 8$, $2^5 = 32$, $2^7 = 128$, ir aišku, kad 2^m galūnės šiuo atveju yra 2 arba 8. Bet tada x^2 galūnės būtų 7 arba 3, o tai nėra skaičių kvadratų galūnės. Taigi (1) lygtis sprendinių su nelyginiais m neturi.

Vadinasi, (1) lygtis turi vienintelį sprendinį. Prisiminus neigiamus x, gauname du sprendinius: $x = \pm 59$.

Atsakymas. $x = \pm 59$.

221. Kadangi taškų ne taip jau daug — tik 9, tai reikiamą konstrukciją galima rasti vadinamuoju bandymų ir klaidų metodu. Greitai įsitikiname, kad su 6 taškais vienoje tiesėje niekas neišeina (per mažai tiesių), o su 5 ar 4 taškais vienoje tiesėje palyginti greitai galima „atspėti“ panašią į kurią nors iš toliau pavaizduotų konstrukcijų. Žinoma, toks metodas prastas, kai taškų daug, ir norom nenorom prisieina kažką sugalvoti.

222. *Pirmas būdas.* Antrą lygtį keliame kvadratu ir perrašome sistemą taip:

$$\begin{cases} (x^2+y^2)^2 - 8x^2y^2 = 1, & (1) \\ 16x^2y^2(x^2-y^2)^2 = 1. & (2) \end{cases}$$

Aišku, kad (2) lygtyje skirtumo kvadratą pravartu pakeisti sumos kvadratu:

$$16x^2y^2(x^2+y^2)^2 - 64x^4y^4 = 1. \qquad (3)$$

Įsivedę naujus kintamuosius $u = (x^2+y^2)^2$, $v = 8x^2y^2$, gauname sistemą

$$\begin{cases} u - v = 1, & (4) \\ 2vu - v^2 = 1. & (5) \end{cases}$$

Įstatę iš (4) lygties gautą išraišką $v = u - 1$ į (5) lygtį, turime

$$2(u-1)u - (u-1)^2 = 1, \quad u^2 = 2.$$

Grįžtame prie senųjų kintamųjų: $(x^2+y^2)^4 = 2$, $x^2+y^2 = \sqrt[4]{2}$.

Antras būdas. Nesunku pastebėti, kad sistemos pirmame būde gautos sistemos $\{(1), (3)\}$ (1) lygtį verta pakelti kvadratu ir sudėti su (2) lygtimi.

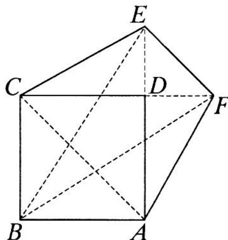
Tada iš karto gauname

$$(x^2+y^2)^4 = 2, \quad \text{t. y.} \quad x^2+y^2 = \sqrt[4]{2}.$$

Žinoma, tą patį galima buvo padaryti ir sistemoje $\{(4), (5)\}$.

Atsakymas. $\sqrt[4]{2}$.

223. Kadangi $AC \parallel EF$, tai $\angle EFD = \angle DCA = 45°$. Todėl $ED = DF$. Pasižymėkime jų ilgį x. Tada $AF = CE = \sqrt{1+x^2}$, $EF = x\sqrt{2}$.



Kadangi $BE \parallel AF$, tai $\triangle ABE$ ir $\triangle DFA$ panašūs, todėl $AB : AE = DF : DA$, $1 : (1+x) = x : 1$,

$$x(1+x) = 1, \quad x^2 + x - 1 = 0, \quad x = -\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{1}{4}+1} = \frac{\sqrt{5}-1}{2}.$$

Taigi penkiakampio kraštinės

$$EF = x\sqrt{2} = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}, \quad CE = FA = \sqrt{1+x^2} = \sqrt{2-x} = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$$

(rėmėmės lygybe $x^2 = 1 - x$, t. y. lygtimi, iš kurios radome x).

Atsakymas. $CE = FA = \frac{\sqrt{10-2\sqrt{5}}}{2}$, $EF = \frac{\sqrt{10}-\sqrt{2}}{2}$.

Pastaba. Žymiai sunkesnis būtų atvirkštinis uždavinys:

Kvadrato $ABCD$ kraštinė lygi 1. Kraštinės AD tęsinyje pažymėtas taškas E, kraštinės CD tęsinyje — taškas F, ir $DE = DF = \frac{\sqrt{5}-1}{2}$. Įrodykite, kad penkiakampio $ABCEF$ kiekviena įstrižainė lygiagreti jo kraštanei.

Sprendžiant šį uždavinį, tektų įrodyti, kad $EB \parallel FA$. Tuo įsitikintume, įrodę, kad $\angle FAE = \angle AEB$. Kampų lygybė išplauktų iš stačiųjų $\triangle ABE$ ir $\triangle DFA$ panašumo, o tam reikėtų įrodyti, kad kraštinės proporcingos, $AB : AE = DF : DA$. Mes tai jau žinome, bet nesunku ir tiesiogiai patikrinti lygybę

$$1 : \frac{\sqrt{5}+1}{2} = \frac{\sqrt{5}-1}{2} : 1.$$

224. *Pirmas būdas.* Nagrinėkime du atvejus: a) $x \leqslant 1$, b) $x > 1$.

a) atveju iš sąlygos $xy + y^2 > 3 - x^2 \geqslant 3 - 1 = 2$, ir teiginys įrodytas.

b) atveju $x > 1$ skirkime dvi galimybes: $y \geqslant 1$ ir $y < 1$. Jei $y \geqslant 1$, tai $x^2 + xy \geqslant x^2 + x > 1 + 1 = 2$. Jei $y < 1$, tai iš sąlygos $x^2 + xy > 3 - y^2 > 2$.

Antras būdas. Tarkime priešingai, kad abu skaičiai $x^2 + xy \leqslant 2$ ir $y^2 + xy \leqslant 2$. Tada iš sąlygos $y^2 > 3 - (x^2 + xy) \geqslant 1$, ir $y > 1$. Analogiškai $x^2 > 3 - (y^2 + xy) \geqslant 1$, ir $x > 1$. Bet tada neteisinga nelygybė $x^2 + xy \leqslant 2$, — prieštara. Taigi mūsų prielaida neteisinga, ir teiginys įrodytas.

Trečias būdas. Nagrinėkime du atvejus: a) $x^2 + xy > 2$, b) $x^2 + xy \leqslant 2$.

a) atveju įrodinėti nieko nebereikia.

b) atveju $y^2 > 3 - (x^2 + xy) \geqslant 1$, $y > 1$. Kadangi $x^2 + xy \leqslant 2$, tai $x^2 + x < 2$, ir $x < 1$. Todėl $y^2 + xy > 3 - x^2 > 2$.

Ketvirtas būdas. Pagal vidurkių nelygybę

$$x^2 + y^2 + \frac{x^2 + y^2}{2} > 3, \quad x^2 + y^2 > 2.$$

Kai $x \geqslant y$, tai $x^2 + xy \geqslant x^2 + y^2 > 2$. Kai $x < y$, tai $y^2 + xy > y^2 + x^2 > 2$.

225. Išskaidykime skaičių $1994 = 2 \cdot 997$. Skaičius 997 yra pirminis. Užtenka patikrinti, ar jis nesidalija iš pirminių skaičių, mažesnių už 32. Iš tikrųjų, jei jis dalytųsi iš natūraliojo skaičiaus, didesnio už 32, tai dalmuo būtų mažesnis už $\frac{997}{32} < \frac{1024}{32} = 32$. Tada skaičius dalytųsi iš mažesnio už 32 dalmens, vadinasi, dalytųsi iš kurio nors pirminio skaičiaus, mažesnio už 32. Bet jis nesidalija iš 2, 3 ir 5 pagal atitinkamus dalumo požymius; nesidalija iš 7, nes

$$997 = 777 + 220 = 111 \cdot 7 + 2 \cdot 11 \cdot 10;$$

nesidalija iš 11, nes

$$997 = 11 \cdot 90 + 7;$$

nesidalija iš 13, nes

$$997 = 13 \cdot 9 + 880 = 13 \cdot 9 + 8 \cdot 11 \cdot 10;$$

nesidalija iš 17, nes

$$997 = 980 + 17 = 2 \cdot 7^2 \cdot 10 + 17;$$

nesidalija iš 19, nes

$$997 = 950 + 47 = 19 \cdot 50 + 47;$$

nesidalija iš 23, nes

$$997 = 920 + 77 = 23 \cdot 40 + 11 \cdot 7;$$

nesidalija iš 29, nes

$$997 = 87 + 910 = 3 \cdot 29 + 7 \cdot 13 \cdot 10;$$

nesidalija iš 31, nes

$$997 = 217 + 780 = 7 \cdot 31 + 6 \cdot 13 \cdot 10.$$

Vadinasi, skaičių sandaugos skaidinys pirminiais daugikliais yra $2^{43} \cdot 997^{43}$. Nustatysime, kada tų skaičių suma mažiausia. Jei tarp jų yra 1, tai jį atmetus, sandauga nepasikeis, o suma sumažės. Taigi laikykime, kad vienetų nėra. Jei dabar tarp tų skaičių yra bent vienas sudėtinis skaičius, didesnis už 4, tai jį galima užrašyti kaip ab, $a \geqslant 2$, $b > 2$. Pakeitus skaičių ab dviem skaičiais a ir b, sandauga nepasikeis, o suma sumažės, nes $a + b < ab$, $ab - a - b + 1 > 1$, $(a - 1)(b - 1) > 1$. Taigi galima laikyti, kad tarp tų skaičių yra tik pirminiai skaičiai ir ketvertai. Tolesnis ketvertų skaidymas jau nieko nebekeičia: ar turime 4, ar vietoj jo 2 ir 2, tiek suma, tiek sandauga nebekinta. Vadinasi, galima laikyti, kad išskaidyti ir ketvertai, ir gauname, kad mažiausią sumą duoda skaidinys $2^{43} \cdot 997^{43}$, t. y. 43 skaičiai, lygūs 2, ir 43 skaičiai, lygūs 997, o ta suma lygi $(2+997)43 = 43 \cdot 999 = 43000 - 43 = 42957$. (Žinoma, tą pačią sumą duoda ir sandauga, kurioje yra bet kuris skaičius $n \leqslant 21$ ketvertų: $2^{43-2n} \cdot 4^n \cdot 997^{43}$.) Taigi mažiausia suma yra 42957, bet kiekvieną sumą nesunku padidinti vienetu: matėme, kad, prijungus prie skaičių vienetą, sandauga nepakis, o suma padidės vienetu. Taigi mūsų suma gali įgyti visas natūraliąsias reikšmes, ne mažesnes už 42957. Atsakymą galima trumpai parašyti $n \geqslant 42957, n \in \boldsymbol{N}$, arba kiek kitaip: $42956 + n, n \in \boldsymbol{N}$.

Atsakymas. $42956 + n, n \in \boldsymbol{N}$.

226. Įrodysime dar daugiau: $6 \leqslant a + b + c < \sqrt{48}$.

Pirmas būdas. Pažymėkime $P = a + b + c$. Tada

$$P^2 = (a + b + c)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac).$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned} 2P^2 &= 2(a^2 + b^2 + c^2) + 4(ab + bc + ac) = \\ &= (a - b)^2 + (b - c)^2 + (c - a)^2 + 6(ab + bc + ac) \geqslant \\ &\geqslant 6(ab + bc + ac) \geqslant 72, \end{aligned}$$

todėl $P \geqslant 6$. Kita vertus, kadangi $a < b + c$, $b < a + c$, $c < a + b$, tai

$$\begin{aligned} P^2 &= a^2 + b^2 + c^2 + 2(ab + bc + ac) < \\ &< a(b + c) + b(a + c) + c(a + b) + 2(ab + bc + ac) = \\ &= 4(ab + bc + ac) = 48, \end{aligned}$$

ir $P < \sqrt{48}$.

Antras būdas. Matėme, kad pirmas būdas remiasi nelygybėmis

$$ab + bc + ac \leqslant a^2 + b^2 + c^2 < 2ab + 2ac + 2bc.$$

Šias nelygybes galima įrodyti ir kiek kitaip. Kairioji nelygybė išplaukia iš vidurkių nelygybės:

$$2ab + 2bc + 2ac \leqslant a^2 + b^2 + b^2 + c^2 + a^2 + c^2 = 2a^2 + 2b^2 + 2c^2.$$

Dešiniąją nelygybę nesunku įrodyti išrikiavus kraštines pagal ilgį. Tarkime, pavyzdžiui, kad $a \geqslant b \geqslant c$. Tada

$$\begin{aligned} a^2 + b^2 + c^2 &< a(b + c) + b^2 + c^2 \leqslant ab + ac + ab + ac = \\ &= 2ab + 2ac < 2ab + 2ac + 2bc. \end{aligned}$$

Pastaba. Galima įrodyti, kad nelygybės $6 \leqslant P < \sqrt{48}$ pagerinti nebegalima: skaičiaus 6 negalima pakeisti didesniu skaičiumi, o skaičiaus $\sqrt{48}$ — mažesniu.

Įrodyti pirmą teiginio dalį nesunku: imkime trikampį su kraštinėmis $a = b = c = 2$. Jis tenkina uždavinio sąlygą, o $P = 6$, taigi pakeitus skaičių 6 didesniu kairioji nelygybė bus neteisinga.

Sunkiau įrodyti antrą teiginio dalį (be kita ko ir todėl, kad dešinioji nelygybė griežta). Įrodysime, kad perimetras negali pasiekti rėžio $\sqrt{48}$. Tuo įsitikinsime, jei įrodysime tokį teiginį: kad ir kokį imtume mažesnį už $\sqrt{48}$ skaičių $\sqrt{48} - \varepsilon$ $(0 < \varepsilon < 1)$, visada atsiras toks trikampis su kraštinėmis a, b, c, $ab + ac + bc = 12$, kurio perimetras $P > \sqrt{48} - \varepsilon$. Suprantama, kad $0 < \varepsilon < 1$, nes, imant $\varepsilon \geqslant 1$, būtų $P < 6$, o tai prieštarauja jau įrodytai nelygybei $P \geqslant 6$.

Nagrinėkime trikampį, kurio kraštinės yra $b = c = \sqrt{12} - \varepsilon$, o trečia kraštinė tokia, kad būtų teisinga lygybė

$$ab + ac + bc = 12,$$

t. y. $2ac + c^2 = 12$, $a = \frac{12 - c^2}{2c}$. Nesunku įsitikinti, kad toks trikampis egzistuoja — tam užtenka patikrinti trikampio nelygybę $a < 2c$, t. y. nelygybę

$$\frac{12 - c^2}{2c} < 2c, \quad 5c^2 > 12, \quad c > \sqrt{\frac{12}{5}}.$$

Bet mūsų pasirinktas $c = \sqrt{12} - \varepsilon > \sqrt{12} - 1 > 2$, taigi didesnis ir už skaičių $\sqrt{\frac{12}{5}}$.

Apskaičiuokime šio trikampio perimetrą:

$$P = a + b + c = a + 2c = \frac{12 - c^2}{2c} + 2c = \frac{12 + 3c^2}{2c}.$$

Bet $c = \sqrt{12} - \varepsilon$, todėl

$$\begin{aligned} P &= \frac{6}{c} + \frac{3c}{2} = \frac{6}{\sqrt{12} - \varepsilon} + \frac{3}{2}(\sqrt{12} - \varepsilon) = \\ &= \frac{6(\sqrt{12} + \varepsilon)}{12 - \varepsilon^2} + \frac{3}{2}(\sqrt{12} - \varepsilon) > \frac{6(\sqrt{12} + \varepsilon)}{12} + \frac{3}{2}(\sqrt{12} - \varepsilon) = \\ &= 2\sqrt{12} - \varepsilon. \end{aligned}$$

Įrodėme, kad egzistuoja trikampis, kurio perimetras $P > \sqrt{48} - \varepsilon$, $0 < \varepsilon < 1$. Kitais žodžiais tariant, nelygybėje $P < \sqrt{48}$ skaičiaus $\sqrt{48}$ negalima pakeisti mažesniu.

227. *Pirmas būdas.* Matome, kad kairėje pusėje „daug" sumų $x + y$, $x + z$, $y + z$. Todėl verta jas „pagaminti" ir dešinėse pusėse. Pavyzdžiui, pirmą lygtį padauginę iš 2 ir sudėję su antra, turime

$$2(x + y)(x + z) + (x + y)(y + z) = 2(x + y).$$

Analogiškai pirmą lygtį dauginame iš 3 ir sudedame su trečia:

$$3(x + y)(x + z) + (x + z)(y + z) = 3(x + z),$$

taip pat antrą lygtį, padaugintą iš 3, sudedame su trečia, padauginta iš 2:

$$3(x + y)(y + z) + 2(x + z)(y + z) = 6(y + z).$$

Gavome trijų lygčių sistemą. Įsivedę naujus kintamuosius

$$x + y = u, \quad x + z = v, \quad y + z = w,$$

turime sistemą

$$\begin{cases} u(2v + w - 2) = 0, \\ v(3u + w - 3) = 0, \\ w(3u + 2v - 6 = 0, \end{cases}$$

kuri subyra į 8 sistemų visumą

$$u = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \tag{1}$$

$$u = 0, \quad v = 0, \quad 3u + 2v - 6 = 0, \tag{2}$$

$$u = 0, \quad 3u + w - 3 = 0, \quad w = 0, \tag{3}$$

$$u = 0, \quad 3u + w - 3 = 0, \quad 3u + 2v - 6 = 0, \tag{4}$$

$$2v + w - 2 = 0, \quad v = 0, \quad w = 0, \tag{5}$$

$$2v + w - 2 = 0, \quad v = 0, \quad 3u + 2v - 6 = 0, \tag{6}$$

$$2v + w - 2 = 0, \quad 3u + w - 3 = 0, \quad w = 0, \tag{7}$$

$$2v + w - 2 = 0, \quad 3u + w - 3 = 0, \quad 3u + 2v - 6 = 0. \tag{8}$$

Nieko nerašydami matome, kad (2), (3) ir (5) sistema neturi sprendinių, o (1), (4), (6), (7) sistemos duoda sprendinius

$$(u;\ v;\ w) \in \{(0;\ 0;\ 0),\ (0;\ 3;\ 3),\ (2;\ 0;\ 2),\ (1;\ 1;\ 0)\}.$$

Išspręsime (8) sistemą. Iš pirmos lygties atėmę antrą ir pridėję trečią, gauname $4v-5=0$, taigi $v=\frac{5}{4}$, $w=-\frac{1}{2}$, $u=\frac{7}{6}$.

Dabar grįžkime prie kintamųjų x, y, z. Sudėję lygybes

$$x+y=u, \quad x+z=v, \quad y+z=w,$$

turime

$$x+y+z=\frac{1}{2}(u+v+w),$$

ir atėmę iš pastarosios kiekvieną lygybę, gauname

$$x=\frac{1}{2}(u+v-w), \quad y=\frac{1}{2}(u-v+w), \quad z=\frac{1}{2}(-u+v+w).$$

Sistemų (1)–(8) rastieji 5 sprendiniai pagal pastarąsias formules pereina į $(x;\ y;\ z) \in \{(0;\ 0;\ 0),\ (0;\ 0;\ 3),\ (0;\ 2;\ 0),\ (1;\ 0;\ 0),\ (\frac{35}{24};\ -\frac{7}{24};\ -\frac{5}{24})\}$. Sprendimas baigtas.

Žinoma, pakeisti kintamuosius galima iš pat pradžių, ir gautume sistemą

$$\begin{cases} 2uv=u+v-w, \\ uw=u-v+w, \\ 2vw=3(-u+v+w), \end{cases}$$

o tada gal net geriau matyti, kodėl pravartu sudėti pirmą ir antrą lygtis, iš 3 padaugintą pirmą lygtį su trečia lygtimi, taip pat iš 3 padaugintą antrą lygtį su trečia lygtimi.

Antras būdas. Kadangi homogeniškos ir kairiosios lygčių pusės (antrojo laipsnio reiškiniai), ir dešiniosios pusės (pirmojo laipsnio reiškiniai), tai natūralu išbandyti keitinius $\frac{y}{x}=k$, $\frac{z}{x}=t$ (primename, kad nebenagrinėjame nulinių reikšmių). Įstatę išraiškas $y=kx$, $z=tx$, gauname sistemą:

$$\begin{cases} x(1+k)(1+t)=1, \\ x(1+k)(k+t)=2k, \\ x(1+t)(k+t)=3t. \end{cases}$$

Išsireiškę iš pirmos lygties

$$x=\frac{1}{(1+k)(1+t)} \tag{11}$$

ir įstatę į antrą ir trečią lygtis, gauname sistemą

$$\begin{cases} \frac{k+t}{1+t}=2k, \\ \frac{k+t}{1+k}=3t. \end{cases}$$

Išsireiškiame iš jos pirmos lygties t,

$$t=\frac{k}{1-2k}, \tag{12}$$

ir įstatome į antrą lygtį:

$$k + \frac{k}{1-2k} = \frac{3k(1+k)}{1-2k}, \quad 5k^2 = -k, \quad k = -\frac{1}{5}.$$

Todėl iš (12) lygties $t = -\frac{1}{7}$. Tada iš (11) lygties $x = \frac{35}{24}$, ir

$$y = kx = -\frac{7}{24}, \quad z = tx = -\frac{5}{24}.$$

Radome sprendinį be nulinių komponenčių.

Atsakymas. (0; 0; 0), (0; 0; 3), (0; 2; 0), (1; 0; 0), $\left(\frac{35}{24}; -\frac{7}{24}; -\frac{5}{24}\right)$.

228. *Pirmas būdas.* Tarkime priešingai, — kad yra toks racionalusis x, jog $\{x^2\}+\{x\} = 1$. Kadangi

$$x = [x] + \{x\} \quad \text{ir} \quad x^2 = [x^2] + \{x^2\}$$

($[t]$ — skaičiaus t sveikoji dalis), tai sudėję gauname

$$x + x^2 = [x] + [x^2] + \{x\} + \{x^2\} = [x] + [x^2] + 1,$$

taigi

$$x^2 + x = k \quad (k \in \boldsymbol{Z}).$$

(Galima buvo remtis akivaizdžiu teiginiu: jei dviejų skaičių trupmeninių dalių suma lygi 1, tai pačių skaičių suma yra sveikasis skaičius. Iš tikrųjų čia tą teiginį ir įrodėme.)

Dabar įrodysime, kad jeigu pastaroji lygtis turi racionaliųjų sprendinių, tai jie yra sveikieji. [Tai žinomo teiginio atskiras atvejis: jei daugianaris su sveikaisiais koeficientais turi racionaliąją šaknį $\frac{p}{q}$ (p, q — tarpusavyje pirminiai sveikieji skaičiai), tai p yra laisvojo nario daliklis, o q — vyriausiojo nario koeficiento daliklis. Mūsų atveju iš šio teiginio išplaukia, kad $q = \pm 1$, t. y. kad šaknis $\frac{p}{q}$ yra sveikoji. Žinoma, galima nesiremti tokiu bendru teiginiu ir tai įrodyti tiesiogiai. Tai ir padarysime.]

Tarkime, kad $\frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} = k$, tada $\frac{p^2}{q} + p = kq$. Tai reiškia, kad $\frac{p^2}{q}$ yra sveikasis skaičius. Bet jei p ir q neturi bendrų daliklių, tai $q = \pm 1$. Tai ir reiškia, kad šaknis $x = \frac{p}{q}$ yra sveikoji. Bet kai x sveikasis, $\{x^2\} + \{x\} = 0 + 0$, — prieštara.

Antras būdas. Tarkime priešingai, kad egzistuoja racionalus x, tenkinantis lygtį $\{x^2\} + \{x\} = 1$. Išskyrę sveikąją dalį, turėsime

$$x = [x] + \frac{p}{q}, \quad \left\{[x]^2 + \frac{2p[x]}{q} + \frac{p^2}{q^2}\right\} + \frac{p}{q} = 1, \quad \left\{\frac{2p[x]}{q} + \frac{p^2}{q^2}\right\} + \frac{p}{q} = 1.$$

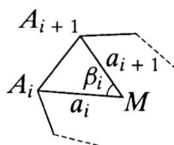
Kadangi dviejų skaičių trupmeninių dalių suma lygi vienetui, tai tų skaičių suma sveikasis skaičius:

$$\frac{2p[x]}{q} + \frac{p^2}{q^2} + \frac{p}{q} = k, \quad k \in \boldsymbol{Z},$$

$$\frac{p^2}{q} + 2p[x] + p = kq.$$

Jei p ir q neturi bendrų daliklių, tai $q = \pm 1$, taigi x yra sveikasis skaičius. Bet tada $\{x^2\} + \{x\} = 0$, — prieštara.

229. Nubraižykime iškiląjį n-kampį, kaip tat pavaizduota brėžinyje.



Trikampio MA_iA_{i+1} plotas

$$S_i = \frac{1}{2}a_ia_{i+1}\sin\beta_i \leqslant \frac{1}{2}a_ia_{i+1} \leqslant \frac{1}{4}(a_i^2 + a_{i+1}^2),$$

ir lygybė čia galima tik kai $\beta_i = \frac{\pi}{2}$, $a_i = a_{i+1}$. Iš tikrųjų,

$$2a_ia_{i+1} \leqslant a_i^2 + a_{i+1}^2 \iff (a_i - a_{i+1})^2 \geqslant 0,$$

ir lygybė galima tik kai $a_i = a_{i+1}$. Bet daugiakampio plotas

$$S = S_1 + S_2 + \cdots + S_n \leqslant \frac{1}{4}(a_1^2 + a_2^2 + a_2^2 + a_3^2 + \cdots + a_n^2 + a_1^2) = \frac{1}{2}(a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2),$$

ir lygybė galima tik kai

$$a_1 = a_2 = \cdots = a_n = a, \quad \beta_1 = \beta_2 = \cdots = \beta_n = \frac{\pi}{2}.$$

Kadangi $\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_n = 2\pi$, tai $\frac{n\pi}{2} = 2\pi$, t. y. $n = 4$. Tada jau aišku, kad $A_iA_{i+1} = \sqrt{a^2 + a^2} = a\sqrt{2}$. Vadinasi, visos keturkampio kraštinės lygios. Kadangi A_1MA_3 ir A_2MA_4 — tiesės, tai jos yra rombo įstrižainės, o kadangi jos lygios, tai keturkampis kvadratas. (Arba kiek kitaip: $\angle A_1A_2M = \frac{\pi}{4} = \angle MA_2A_3$, taigi rombo kampai statieji.)

Atsakymas. Toks taškas yra tik kvadrato viduje (tai kvadrato centras).

230. a) Sakykime, kad stačiakampis $m \times n$ nubrėžtas koordinačių plokštumoje, jo viršūnės yra taškuose $(0; 0)$, $(m; 0)$, $(m; n)$, $(0; n)$. Galimi du atvejai: A) įstrižainė, jungianti viršūnes $(0; 0)$ ir $(m; n)$, daugiau neina nė per vieną gardelės tašką, t. y. tašką su sveikaskaitėmis koordinatėmis; B) įstrižainė eina per gardelės tašką.

A) Šiuo atveju įstrižainė pereina iš vieno kvadratėlio į kitą kirsdama kvadratėlio kraštinę, bet ne viršūnę. Įstrižainė kerta kvadratėlio kraštinę tada ir tik tada, kai ji kerta vieną iš gardelės tiesių

$$x = 1, x = 2, \ldots, x = m - 1, \quad y = 1, y = 2, \ldots, y = n - 1.$$

Tokių tiesių yra $m - 1 + n - 1 = m + n - 2$. Pridėję patį pirmąjį kvadratėlį, nustatome, kad įstrižainė kerta $m + n - 1$ kvadratėlį.

b) Iš pradžių įrodysime tokią pagalbinę lemą. (Beje, ji pakankamai aiški, todėl, norint suprasti uždavinio sprendimo eigą, jos įrodymo galima ir neskaityti.)

Lema. *Įstrižainė eina per gardelės tašką stačiakampio viduje tada ir tik tada, kai m ir n nėra tarpusavyje pirminiai skaičiai. Be to, tada ji eina per visus taškus*

$$(m_1; n_1), (2m_1; 2n_1), (3m_1; 3n_1), \ldots, ((d-1)m_1; (d-1)n_1)$$

ir tik per juos. Čia $d = \text{DBD}(m, n)$ *yra skaičių* m *ir* n *didžiausiasis bendrasis daliklis, o*

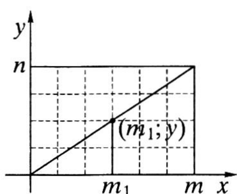
$$m_1 = \frac{m}{d}, \quad n_1 = \frac{n}{d}, \quad \text{DBD}(m_1, n_1) = 1.$$

Lemos įrodymas. Pakankamumas. Duota, kad

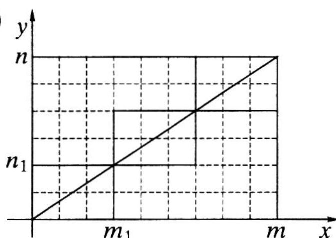
$$d = \text{DBD}(m, n) > 1.$$

Įrodysime, kad įstrižainė eina per tašką $(m_1; n_1)$. Imkime įstrižainės tašką $(m_1; y)$, atitinkantį abscisę m_1 (žr. a) pav.). Reikia įrodyti, kad $y = n_1$. Iš stačiųjų trikampių panašumo turime: $\frac{m}{n} = \frac{m_1}{y}$, arba $y = \frac{nm_1}{m} = \frac{n}{d} = n_1$.

a)



b)



Būtinumas. Duota, kad įstrižainė eina per gardelės tašką $(m_2; n_2)$. Reikia įrodyti, kad $\text{DBD}(m, n) = d > 1$. Iš stačiųjų trikampių panašumo $\frac{m_2}{n_2} = \frac{m}{n}$. Jeigu m_2 ir n_2 turi bendrųjų daliklių, suprastinkime trupmeną iš $\text{DBD}(m_2, n_2) = d_2$. Tada $\frac{m_1}{n_1} = \frac{m}{n}$, ir čia $m_1 = \frac{m_2}{d_2}$, $n_1 = \frac{n_2}{d_2}$, o m_1 ir n_1 neturi bendrų daliklių. Kadangi $mn_1 = m_1 n$, o n_1 neturi bendrų daliklių su m_1, tai m dalijasi iš m_1, $\frac{m}{m_1} = d$. Bet tada $\frac{n}{n_1} = \frac{m}{m_1} = d$, taigi $n = n_1 d$, $m = m_1 d$, o n_1 ir m_1 tarpusavyje pirminiai. Tai ir reiškia, kad $\text{DBD}(m, n) = d$. Kadangi $m > m_2 \geqslant m_1$, tai $d = \frac{m}{m_1} > 1$.

Įrodėme pirmąją lemos dalį, kad įstrižainė eina per sveikąjį tašką tada ir tik tada, kai $\text{DBD}(m, n) > 1$. Dabar įrodysime antrąją jos dalį, — kad ji eina per išvardytus taškus. Jau žinome, kad ji eina per tašką $(m_1; n_1)$. Nesunku įsitikinti, kad ji eina per taškus $(km_1; kn_1)$, $k = 2, 3, \ldots, d-1$. Iš tikrųjų, imkime jos tašką su abscise km_1. Įrodysime, kad to taško ordinatė yra lygi kn_1. Iš stačiųjų trikampių panašumo

$$\frac{m}{n} = \frac{km_1}{y}, \quad \text{ir} \quad y = \frac{nkm_1}{m} = \frac{kn}{d} = kn_1.$$

Dabar tarkime, kad įstrižainė eina per tam tikrą tašką $(M; N)$. Užtenka įrodyti, kad $M = km_1$, $k \in \{1, 2, \ldots, d-1\}$. Iš stačiųjų trikampių $\frac{M}{N} = \frac{m}{n}$, todėl

$$\frac{M}{N} = \frac{m_1}{n_1}, \quad Mn_1 = m_1 N.$$

Kadangi n_1 neturi bendrų daliklių su m_1, tai M dalijasi iš m_1, $\frac{M}{m_1} = k$, $M = m_1 k$. Bet $m_1 \leqslant M < m$, arba $m_1 \leqslant km_1 < m_1 d$, todėl $1 \leqslant k < d$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Dabar uždavinio sprendimą galima pabaigti dvejopai.

Stačiakampyje $m \times n$ galima išskirti d stačiakampių $m_1 \times n_1$, kurių įstrižainės sudaro stačiakampio $m \times n$ įstrižainę (žr. b) pav.). Kiekviena mažojo stačiakampio įstrižainė kerta $m_1 + n_1 - 1$ kvadratėlį, taigi įstrižainė kirs

$$d(m_1 + n_1 - 1) = m + n - d = m + n - \text{DBD}(m, n)$$

kvadratėlių.

b) Sakykime, kad stačiakampis gretasienis $m \times n \times p$ nubrėžtas koordinačių erdvėje, o įstrižainė jungia taškus (0; 0; 0) ir $(m; n; p)$. Ir vėl skaidykime uždavinį į du atvejus: A) įstrižainė neina daugiau nei per vieną gardelės tašką; B) įstrižainė eina per gardelės tašką.

Analogiškai a) atvejui suformuluosime pagalbinę lemą.

Lema. *Įstrižainė eina per stačiakampio gretasienio vidinį gardelės tašką tada ir tik tada, kai* $d = \text{DBD}(m, n, p) > 1$. *Be to, tada ji eina per visus taškus*

$$(m_1; n_1; p_1), (2m_1; 2n_1; 2p_1), \ldots, ((d-1)m_1; (d-1)n_1; (d-1)p_1)$$

ir tik per juos. Čia $m_1 = \frac{m}{d}$, $n_1 = \frac{n}{d}$, $p_1 = \frac{p}{d}$.

Įstrižainė kerta vertikaliąją gardelės tiesę $\{x = M, y = N\}$, $M < m$, $N < n$, $M, N \in \mathbf{N}$, *tada ir tik tada, kai* $d_{mn} = \text{DBD}(M, N) > 1$. *Be to, tada ji kerta visas vertikaliąsias tieses*

$$\{x = M_1, y = N_1\}, \{x = 2M_1, y = 2N_1\}, \ldots,$$
$$\{x = (d_{mn} - 1)M_1, y = (d_{mn} - 1)N_1\}$$

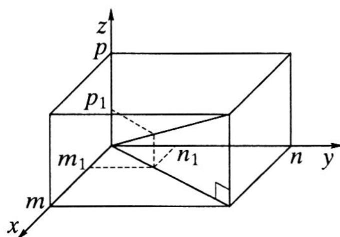
(čia $M_1 = \frac{m}{d_{mn}}$, $N_1 = \frac{n}{d_{mn}}$*) ir tik tokias vertikaliąsias gardelės tieses.*

Analogiškas teiginys teisingas ir tiesėms lygiagrečioms ašims Ox *ir* Oy.

Lemos įrodymas. Pakankamumas. Duota, kad

$$d = \text{DBD}(m, n, p) > 1.$$

Įrodysime, kad įstrižainė eina per tašką $(m_1; n_1; p_1)$. Imkime įstrižainės tašką $(m_1; y; z)$, atitinkantį abscisę m_1 (žr. pav.).



Reikia įrodyti, kad $y = n_1$, $z = p_1$. Išveskime plokštumą per įstrižainę ir jos projekciją į plokštumą xOy. Iš stačiųjų trikampių toje plokštumoje panašumo ir stačiųjų trikampių plokštumoje xOy panašumo

$$\frac{n}{y} = \frac{p}{z} = \frac{m}{m_1} = d,$$

taigi $y = \frac{n}{d} = n_1$, $z = \frac{p}{d} = p_1$.

Dabar sakykime, kad $d_{mn} = \text{DBD}(m,n) > 1$. Įrodysime, kad įstrižainė kerta tiesę $\{x = M_1, y = N_1\}$, čia $M_1 = \frac{m}{d_{mn}}$, $N_1 = \frac{n}{d_{mn}}$. Tam užtenka įrodyti, kad įstrižainės projekcija eina per tašką $(M_1; N_1)$. Bet tai aišku iš punkto a) lemos. Lygiai taip pat aišku, kad įstrižainės projekcija eina per kiekvieną tašką $(kM_1; kN_1)$, $k = 2, 3, \dots, d_{mn} - 1$, taigi įstrižainė kerta atitinkamas vertikaliąsias gardelės tieses.

Būtinumas. Duota, kad įstrižainė eina per gardelės tašką $(m_2; n_2; p_2)$. Reikia įrodyti, kad $\text{DBD}(m,n,p) = d > 1$. Iš stačiųjų trikampių panašumo

$$\frac{m_2}{m} = \frac{n_2}{n} = \frac{p_2}{p}.$$

Jeigu $\text{DBD}(m_2, n_2, p_2) = d_2 > 1$, nagrinėkime tašką $(m_1; n_1; p_1)$, čia

$$m_1 = \frac{m_2}{d_2}, \quad n_1 = \frac{n_2}{d_2}, \quad p_1 = \frac{p_2}{d_2}.$$

Tada $\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1}$, o m_1, n_1 ir p_1 neturi bendro daliklio. Sakykime, kad

$$\frac{m}{m_1} = \frac{n}{n_1} = \frac{p}{p_1} = \frac{a}{b},$$

a ir b neturi bendrų daliklių. Kadangi $m > m_2 \geqslant m_1$, tai $a > b$, ir $a \geqslant 2$. Tada $mb = m_1 a$, ir m_1 dalijasi iš b. Lygiai taip pat n_1 ir p_1 dalijasi iš b. Kadangi $\text{DBD}(m_1, n_1, p_1) = 1$, tai $b = 1$. Todėl $m = am_1, n = an_1, p = ap_1$, ir $\text{DBD}(m,n,p) > 1$.

Dabar sakykime, kad įstrižainė kerta vertikaliąją gardelės tiesę $x = M$, $y = N$. Įrodysime, kad $d_{mn} = \text{DBD}(m,n) > 1$. Iš tikrųjų: įstrižainės projekcija eina per tašką $(M; N)$, ir pagal a) punkto lemą

$$\text{DBD}(m,n) = d_{mn} > 1.$$

Lema įrodyta.

Dabar mes jau pasiruošę atsakyti į uždavinio klausimą.

A) Įstrižainė pereina į naują kubelį, kai kerta vieną iš plokštumų

$$x = 1, \dots, x = m-1, \quad y = 1, \dots, y = n-1, \quad z = 1, \dots, z = p-1.$$

Įstrižainė negali įeiti į naują kubelį per viršūnę (nes joje nėra gardelės taškų), bet gali įeiti į kubelį per jo briauną ir kirsti iš karto dvi plokštumas. Todėl, eidami per briauną ir įskaitydami kiekvieną plokštumą po vieną kartą, mes padidiname kubelių skaičių vienetu. Vadinasi, iš bendro plokštumų skaičiaus reikia atmesti vienetą tiek kartų, kiek kartų įstrižainė eina per sveikąsias tieses. Pridėję pirmąjį kubelį, taip gauname, kad įstrižainė eina per

$$m - 1 + n - 1 + p - 1 - (\text{DBD}(m,n) - 1) - (\text{DBD}(m,p) - 1) - \\ - (\text{DBD}(n,p) - 1) + 1 = m + n + p - \text{DBD}(m,n) - \text{DBD}(m,p) - \text{DBD}(n,p) + 1$$

kubelius.

B) Šį atvejį vėl galima nagrinėti dvejopai.

Stačiakampyje gretasienyje $m \times n \times p$ galima išskirti d stačiakampių gretasienių („plytų") $m_1 \times n_1 \times p_1$, kurių įstrižainės sudaro gretasienio $m \times n \times p$ įstrižainę. Kiekvienos plytos įstrižainė kerta

$$m_1 + n_1 + p_1 - \mathrm{DBD}(m_1, n_1) - \mathrm{DBD}(m_1, p_1) - \mathrm{DBD}(n_1, p_1)$$

kubelių, taigi gretasienio įstrižainė kirs

$$d(m_1 + n_1 + p_1 - \mathrm{DBD}(m_1, n_1) - \mathrm{DBD}(m_1, p_1) - \mathrm{DBD}(n_1, p_1) + 1)$$

kubelių. Bet $dm_1 = m$,

$$d \cdot \mathrm{DBD}(m_1, n_1) = \mathrm{DBD}(dm_1, dn_1) = \mathrm{DBD}(m, n),$$

o $d = \mathrm{DBD}(m, n, p)$, taigi kertamų kubelių skaičius lygus

$$m + n + p - \mathrm{DBD}(m, n) - \mathrm{DBD}(m, p) - \mathrm{DBD}(n, p) + \mathrm{DBD}(m, n, p).$$

Žinoma, ši formulė tinka ir A atveju, nes tada $\mathrm{DBD}(m, n, p) = 1$.

Atsakymas. a) $m + n - \mathrm{DBD}(m, n)$; b) $m + n + p - \mathrm{DBD}(m, n) - \mathrm{DBD}(m, p) - \mathrm{DBD}(n, p) + \mathrm{DBD}(m, n, p)$.

231. Remsimės dviem paprastais faktais.

I. Jei ketvertas a, b, c, d yra toks, kad sandauga $abcd$ dalijasi iš kurios nors (iš 11 minėtų) sumos S, tai padauginus visus ketverto skaičius iš natūraliojo skaičiaus n, naujųjų skaičių sandauga $abcdn^4$ taip pat dalijasi iš naujosios sumos Sn.

II. Jeigu ketvertą a, b, c, d padauginame iš kurios nors iš minėtų sumų S, tai naujųjų skaičių aS, bS, cS, dS sandauga $abcdS^4$ jau dalijasi iš atitinkamos naujosios sumos

$$aS + bS + cS + dS = S^2.$$

Dabar imkime bet kuriuos pradinius skirtingus skaičius a, b, c, d ir padauginkime juos iš visų minėtų 11 sumų. Naujai gautas skaičių ketvertas tenkins uždavinio reikalavimą. Pavyzdžiui, atlikę šią procedūrą su skaičiais 1, 2, 3, 4, gautume ketvertą $A, 2A, 3A, 4A$, kuriame

$$A = 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 7 \cdot 8 \cdot 9 \cdot 10.$$

Pasistenkime gauti mažesnį ketvertą. Nesunku įžvelgti, kad nebūtina dauginti iš visų sumų, ir netgi užtenka dauginti iš „trūkstamų daugiklių", t. y. į A imti tik tokius daugiklius, kad $24A^4$ dalytųsi iš visų sumų. Kadangi iš skaičių 1, 2, 3, 4 galima sudaryti sumas 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, 10, tai į A užtenka įtraukti daugiklius 3, 5, 7. Gauname ketvertą $A, 2A, 3A, 4A$, kuriame $A = 3 \cdot 5 \cdot 7$, t. y. ketvertą 105, 210, 315, 420. Galimas dalykas, kad tai ir yra mažiausias ketvertas, ir iš viso vienintelis mažesnių už 1000 skaičių ketvertas.

Jeigu sąlygoje būtų leidžiama imti vienodus skaičius, tai natūralu pradėti nuo ketverto 1, 1, 1, 1. Tada galimos sumos yra 2, 3, 4, todėl užtenka imti $A = 2 \cdot 3$, ir gautume ketvertą 6, 6, 6, 6, kuris jau tenkina sąlygą.

Atsakymas. Pavyzdžiui, 105, 210, 315, 420.

232. Jeigu trikampio kraštines pažymėsime a, b, c, o perimetrą — P, tai teisinga nelygybė

$$2(a^2 + b^2 + c^2) < P^2.$$

[Nelygybė $2(a^2 + b^2 + c^2) < (a + b + c)^2$ ekvivalenti nelygybėms

$$a^2 + b^2 + c^2 - 2ab - 2ac - 2bc < 0,$$
$$a(b + c - a) + b(a + c - b) + c(a + b - c) > 0,$$

o pastaroji išplaukia iš trikampio nelygybės. Beje, ji dar kitaip įrodyta 226 uždavinyje.]

Sudėję 4 nelygybes, parašytas kiekvienai piramidės sienai, gauname

$$4(a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2) < P_1^2 + P_2^2 + P_3^2 + P_4^2.$$

Kadangi dešinė pusė ne didesnė už $4M^2$ (M pažymėjome didžiausią iš P_1, P_2, P_3, P_4), tai

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2 < M^2,$$

o

$$\sqrt{a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + f^2} < M.$$

Įrodėme net stipresnę — griežtąją — nelygybę.

233. *Pirmas būdas.* Nesunku sugalvoti reikiamą funkciją neneigiamiesiems x: $f(x) = x^{\sqrt{3}}$. Tada

$$f(f(x)) = \left(x^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = x^3.$$

Dabar jau galima atspėti ir funkciją neigiamiesiems x: $f(x) = -|x|^{\sqrt{3}}$. Tada

$$f(f(x)) = -\left(|x|^{\sqrt{3}}\right)^{\sqrt{3}} = -|x|^3 = x^3.$$

Taigi mums tinka funkcija

$$fx = \begin{cases} x^{\sqrt{3}}, & x \geqslant 0, \\ -x|x|^{\sqrt{3}}, & x < 0, \end{cases} = |x|^{\sqrt{3}-1}x.$$

Vartojant signum funkciją (kitaip — ženklo funkciją)

$$\operatorname{sgn} x = \begin{cases} 1, & x > 0, \\ 0, & x = 0, \\ -1, & x < 0, \end{cases}$$

mūsų rastąją funkciją galima užrašyti ir taip: $f(x) = |x|^{\sqrt{3}}\operatorname{sgn} x$.

Antras būdas. Pasirodo, įmanoma įgyvendinti tokią idėją — vieną kartą funkcija tik kelia kubu, o kitą kartą nedaro nieko. Na, ne visai taip: pirmą kartą kelia kubu ir keičia ženklą, o antrą kartą tik keičia ženklą (arba atvirkščiai). Tai išreiškia tokia funkcija:

$$f(x) = \begin{cases} -x^3, & x \geqslant 0, \\ -x, & x < 0. \end{cases}$$

Iš tikrųjų, jei $x > 0$, tai $f(x) = -x^3$, todėl

$$f(f(x)) = -(-x^3) = x^3.$$

Jei $x < 0$, tai $f(x) = -x$, todėl

$$f(f(x)) = f(-x) = -(-x^3) = x^3.$$

Jei $x = 0$, tai $f(0) = 0$, ir $f(f(0)) = f(0) = 0$.

Atsakymas. Taip, pavyzdžiui, $f(x) = |x|^{\sqrt{3}-1}x$.

234. Mažiausio apskritimo apindulį pažymėkime r, vidutinio — R (didžiausio apskritimo spindulys lygus $\frac{1}{2}$). Sujungę minėtų trijų apskritimų centrus, pagal Pitagoro teoremą gauname

$$\left(r+\frac{1}{2}\right)^2+(r+R)^2=\left(R+\frac{1}{2}\right)^2.$$

Be to, matome, kad $2r+4R=1$. Išraišką $4R=1-2r$ įstatę į lygtį

$$(4r+2)^2+(4r+4R)^2=(4R+2)^2,$$

gauname

$$(4r+2)^2+(1+2r)^2=(3-2r)^2,$$
$$16r^2+32r-4=0,\quad 4r^2+8r-1=0,$$
$$(2r+2)^2=5,\quad 2r+2=\sqrt{5}.$$

Todėl ilgesnioji stačiakampio kraštinė lygi $2+2r=\sqrt{5}$.

Atsakymas. $\sqrt{5}$.

XLIV OLIMPIADA (1995 m.)

235. (Plg. [1], 987 uždavinį). Iš karto kyla mintis, kad turėtų būti

$$\begin{cases}3\sqrt{x}=\sqrt{30},\\ \sqrt{y}=\sqrt{18}\end{cases}\quad\text{arba}\quad\begin{cases}3\sqrt{x}=\sqrt{18},\\ \sqrt{y}=\sqrt{30}.\end{cases}$$

Tada gauname $x=\frac{10}{3}$, $y=18$ arba $x=2$, $y=30$. Iš tikrųjų taip ir yra, bet sunku įrodyti, kad kitų sprendinių nėra. Tolesnis sprendimas iš esmės ir yra minėto fakto įrodymas.

Pradinę lygtį keliame kvadratu:

$$9x+y+6\sqrt{xy}=48+12\sqrt{15},$$
$$9x+y-48=12\sqrt{15}-6\sqrt{xy}. \qquad (1)$$

Dar kartą keliame kvadratu:

$$(9x+y-48)^2=12^2\cdot 15+36xy-12^2\sqrt{15xy}. \qquad (2)$$

Iš čia matome, kad $\sqrt{15xy}$ yra racionalusis skaičius. Dabar (1) lygtį dauginame iš $\sqrt{15}$:

$$(9x+y-48)\sqrt{15}=12\cdot 15-6\sqrt{15xy}.$$

Dešinė pusė racionali, todėl ir kairė pusė turi būti racionali. Bet tai įmanoma tik kai $9x+y-48=0$, — priešingu atveju padaliję abi lygties puses iš $9x+y-48$, gautume, kad $\sqrt{15}$ yra racionalusis skaičius. Todėl

$$\begin{cases}9x+y=48,\\ \sqrt{15xy}=30,\end{cases}\quad\text{t. y.}\quad\begin{cases}9x+y=48,\\ xy=60.\end{cases}$$

Iš pastarosios sistemos randame jau turėtus sprendinius.

Atsakymas. $(\frac{10}{3};\,18)$, $(2;\,30)$.

236. *Pirmas būdas.* Surašykime trikampio kraštines didėjimo tvarka ir pažymėkime jas a, $a+d$, $a+2d$. Pagal stačiojo trikampio įbrėžtinio apskritimo spindulio formulę $2r = a+b-c$ gauname

$$2r = a + a + d - a - 2d = a - d, \quad a = 2r + d.$$

Vadinasi, trikampio kraštinės lygios $2r+d$, $2r+2d$, $2r+3d$, ir pagal Pitagoro teoremą,

$$(2r+3d)^2 - (2r+d)^2 = (2r+2d)^2,$$
$$(4r+4d)2d = 4(r+d)^2,$$
$$2d = r + d, \quad d = r.$$

Galima daryti ir atvirkščiai — iš pradžių taikyti Pitagoro teoremą:

$$(a+2d)^2 - a^2 = (a+d)^2,$$
$$(2a+2d)2d = (a+d)^2,$$
$$a + d = 4d, \quad a = 3d.$$

Vadinasi, trikampio kraštinės yra $3d, 4d, 5d$. Dabar $2r = 3d + 4d - 5d = 2d$, ir $d = r$.

Antras būdas. Apskaičiuokime dviem būdais dvigubą trikampio plotą:

$$a(a+d) = (a + a + d + a + 2d)r.$$

Iš čia $a = 3r$, ir trikampio kraštinės lygios $3r$, $3r+d$, $3r+2d$. Dabar vėl galima remtis Pitagoro teorema, ir

$$(3r+2d)^2 - (3r)^2 = (3r+d)^2, \quad (6r+2d)2d = (3r+d)^2,$$
$$4d = 3r + d, \quad d = r.$$

Radus, kad $a = 3r$, galima taikyti įbrėžtinio apskritimo spindulio formulę. Tada

$$2r = 3r + 3r + d - 3r - 2d,$$

ir vėl $d = r$.

Atsakymas. Progresijos skirtumas lygus r.

237. Pirmą sistemos lygtį perrašome taip:

$$(3x-2y)^2 + (x-2z)^2 + (y-3z)^2 = 0.$$

Kadangi visi reiškiniai skliaustuose turi būti lygūs 0, tai $x = 2z$, $y = 3z$. Tada iš antros lygties

$$8z^3 + 27z^3 + z^3 = -288, \quad z^3 = -8, \quad z = -2.$$

Taigi $x = -4$, $y = -6$. Lieka tik patikrinti, ar šios reikšmės tenkina trečią lygtį:

$$4^4 + 6^4 + 2^4 = 2^4(2^4 + 3^4 + 1) = 16 \cdot 98 = 1600 - 32 = 1568.$$

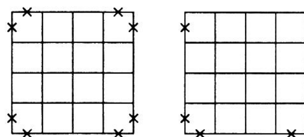
Kadangi reikšmės lygtį tenkina, tai tą patį atsakymą duotų ir pirmųjų dviejų lygčių sistema.

Atsakymas. $(-4; -6; -2)$.

238. Kadangi vienoje vertikalioje (ar horizontalioje) atkarpoje gali tilpti tik 2 grandys, tai laužtės ilgis L negali būti didesnis už $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$.

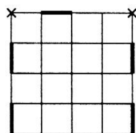
Įrodysime, kad $L \leqslant 18$. Tarkime priešingai, kad yra laužtė, kurios ilgis $L \geqslant 19$.

Aišku, kad jei laužtė, kurios ilgis $L > 4$, ateina į didžiojo kvadrato 4×4 kampą, tai ji turi galą viename iš 3 rutuliukais pažymėtų taškų, ⌊ (vaizduojame apatinį kairįjį kvadrato kampą). Iš tikrųjų, jei jos galas nėra atkarpoje •—•, tai ji turi eiti iš abiejų atkarpos galų į viršų ⊔. Jei ji neturi galo kairėje, tai toliau ji turi eiti į dešinę, ir gauname vienetinį kvadratą, kurio perimetras $L = 4$. Kadangi laužtė turi daugiausiai 2 galus (gal ir nė vieno, jei ji uždara), tai ji ateina ne daugiau kaip į 2 kampus. Vadinasi, ji neateina mažiausiai į 2 kampus. Jei ji neateina į visus 4 kampus, tai kryželiais pažymėję vienetines atkarpas, kurios negali būti laužtės grandys, matome, kad kiekvienoje kvadrato kraštinėje telpa tik 1 grandis, prarandame iš 20 net 4 grandis, ir $L \leqslant 16$.



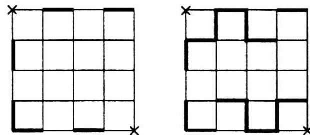
Jei ji neateina į 3 kampus, tai prarandame bent dvi grandis, ir $L \leqslant 18$. Vadinasi, mūsų laužtė ateina į 2 kampus ir neateina į 2 kampus.

1) atvejis. Laužtė ateina į 2 gretimus kampus.



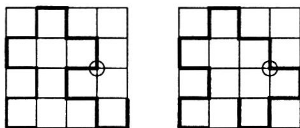
Kadangi viena grandis jau prarasta (piešinyje atkarpoje 04-44 telpa tik viena grandis), tai daugiau grandžių prarasti negalima, taigi laužtė tikrai turi grandis 00-01, 02-03, 40-41, 42-43. Iš dviejų grandžių 14-24 ir 24-34 ji turi lygiai vieną, ir dėl simetrijos galime laikyti, kad ji turi grandį 14-24. Kadangi laužtės galai yra prie apatinių viršūnių, tai „ėjimai“ 14-13 ir 24-23 privalomi. (Pasiimkite languoto popieriaus ir jame vaizduokite ėjimus — bus lengviau!) Bet dabar privalomas ėjimas 23-33, ir iš taško 43 nebepajudėsime. Prieštara.

2) atvejis. Laužtė ateina į 2 priešingus kampus:



Kadangi prarasti galima tik 1 grandį, laikysime, kad ji prarandama kraštinėje 40-44. Grandys 00-01, 02-03, 14-24, 34-44, 00-10, 20-30 tikrai yra — kitaip grandžių bus mažiau kaip 19. Vėl ėjimai 14-13 ir 24-23 privalomi (žr. aukščiau dešinįjį pav.). Dabar privalomi 13-03 ir 23-33. Privalomi ir simetriški ėjimai 20-21 ir 30-31, po to 21-11 ir 31-41. Dabar privalomi ėjimai 41-42, po to 42-32 ir 32-33. Bet grandis 34-44 tapo izoliuota. (Beje, taip gauname ir ilgiausią, uždarąją, laužtę su $L = 16$.) Prieštara.

Įrodėme, kad $L \leqslant 18$. Dabar užtenka nubrėžti konkretų laužtės su $L = 18$ pavyzdį. Tai padaryti nėra sunku. Pavyzdžiui,



Beje, nuo pažymėto taško laužtę galima tęsti simetriškai vertikaliosios ašies atžvilgiu. Pasirodo, kad šios dvi laužtės yra vienintelės, žinoma, neskaitant laužčių, gaunamų iš jų kvadratą sukant arba apverčiant. Tai įrodoma kruopščiai perrenkant visas galimybes — panašiai kaip ir aukščiau.

Atsakymas. Didžiausias galimas tokios laužtės ilgis yra 18.

239. (Plg. [1], 778 uždavinį). *Pirmas būdas.* Nurodysime, kaip rasti skaičių a ir b sandaugą. Jei $a = 0$ arba $b = 0$, tai sandaugą ab galima rasti kad ir taip: $ab = a - a = 0$. Žinoma, šiuo atveju ir be skaičiuoklio sandaugą žinome. Jei $a \neq 0$, $b \neq 0$, tai

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right)^2 = \frac{4}{ab}.$$

Randame pastarojo skaičiaus atvirkštinį — tai $\frac{ab}{4}$. Sudėję paeiliui

$$\frac{ab}{4} + \frac{ab}{4} + \frac{ab}{4} + \frac{ab}{4},$$

gauname ab.

Antras būdas. Dar paprasčiau veikti pagal formulę

$$\left(\frac{1}{a} + \frac{1}{b}\right)^2 - \left(\frac{1}{2}\right)^2 - \left(\frac{1}{b}\right)^2 = \frac{2}{ab}.$$

Radę skaičiaus $\frac{2}{ab}$ atvirkštinį $\frac{ab}{2}$, gauname $\frac{ab}{2} + \frac{ab}{2} = ab$.

Atsakymas. Galima.

Pastaba. Sąlygoje galima atsisakyti sudėties. Iš tikrųjų, jei mums reikia rasti skaičių x ir y sumą, galima daryti taip. Iš pradžių „pasigaminame“ nulį: $x - x = 0$. Dabar iš 0 atėmę y, gauname $-y$: $0 - y = -y$. O atėmę $-y$ iš x, gauname $x - (-y) = x + y$.

240. Pažymėkime skaičius $x_1, x_2, x_3, \ldots, x_{10}$, o jų sumą — S. Tada skaičių sumos po 9 yra lygios $S - x_1$, $S - x_2, \ldots, S - x_{10}$. Devynias iš tų sumų žinome, dešimtos x — ne, tik žinome, kad ji lygi vienai iš tų devynių. Sudėję visas sumas, gauname lygtį

$$(S - x_1) + (S - x_2) + \cdots + (S - x_{10}) =$$
$$= 86 + 87 + 88 + 89 + 90 + 91 + 93 + 94 + 95 + x.$$

Kadangi kairė pusė lygi $10S - S = 9S$ ir dalijasi iš 9, tai ir dešinė pusė turi dalytis iš 9. Kadangi pirmųjų 9 dešinės pusės dėmenų dalybos iš 9 liekanos yra 5, 6, 7, 8, 0, 1, 3, 4, 5, jų suma 39, tai dešimtojo dėmens x liekana turi būti 6. Vadinasi, $x = 87$. Taigi lygtis virsta

$$9S = 5 \cdot 81 + 5 \cdot 90 + 39 + 6,$$
$$S = 5 \cdot 9 + 5 \cdot 10 + 5, \quad S = 5 \cdot 20 = 100.$$

Todėl dėmenys yra $100 - 86 = 14, 13, 13, 12, 11, 10, 9, 7, 6, 5$.

Atsakymas. 5, 6, 7, 9, 10, 11, 12, 13, 13, 14.

241. *Pirmas būdas.* Sprendimo planas toks: bandome 1995 išreikšti dviejų kvadratų suma. Jei tai nepavyksta (ir įrodome, kad tai neįmanoma), tai bandome 1995 išreikšti trijų kvadratų suma.

Nesunku įsitikinti, kad dviejų kvadratų neužtenka. Tarkime priešingai, kad 1995 pavyko išreikšti dviejų natūraliųjų skaičių kvadratų suma. Tada vienas iš tų skaičių lyginis, kitas — nelyginis, ir

$$(2x)^2 + (2y-1)^2 = 1995, \quad 4x^2 + 4y^2 - 4y = 1994, \quad 2x^2 + 2y^2 + 2y = 997.$$

Gavome prieštarą, nes kairėje stovi lyginis skaičius, o dešinėje — nelyginis.

Bandykime 1995 išreikšti trijų kvadratų suma. Iš pradžių bandykime imti didžiausią telpantį kvadratą (panašiai parduotuvėje prie kasos pradedame rinkti reikiamą sumą nuo didžiausių kupiūrų). Tai $44^2 = 1936$ ($45^2 = 2025$ nebetelpa). Lieka $1995 - 1936 = 59$ išreikšti dviejų kvadratų suma. Bet tai vėl neįmanoma: kaip ir aukščiau,

$$(2x)^2 + (2y-1)^2 = 59, \quad 4x^2 + 4y^2 - 4y = 58,$$

ir dešinė pusė nesidalija iš 4.

Bandykime imti kitą didžiausią skaičių — 43. Tada reikia dviejų kvadratų suma išreikšti $1995 - 43^2 = 1995 - 1849 = 146$. Tai lengva padaryti perranka, nors galima pastebėti, kad abu lyginiai kvadratai netinka — 146 nesidalija iš 4. Todėl abu dėmenys nelyginiai,

$$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 = 146, \quad 4x^2 - 4x + 4y^2 - 4y = 144,$$
$$x(x-1) + y(y-1) = 36,$$

ir tinka $x = 6$, tada $y = 3$. Taigi $1995 = 43^2 + 11^2 + 5^2$, ir užtenka trijų dėmenų.

Antras būdas. Lyginio skaičiaus kvadratas $(2k)^2$, dalijamas iš 4, duoda liekaną 0, o nelyginio skaičiaus kvadratas $(2k-1)^2 = 4k(k-1) + 1$, — liekaną 1. Kadangi 1995 dalijami iš 4 duoda liekaną 3, tai aišku, kad dviejų dėmenų neužtenka. Pažiūrėkime, kaip išreikšti 1995 trijų kvadratų suma. Aišku, kad visi dėmenys turi būti nelyginiai, — tik tada liekanų suma bus 3, todėl

$$(2x-1)^2 + (2y-1)^2 + (2z-1)^2 = 1995,$$
$$4x^2 - 4x + 4y^2 - 4y + 4z^2 - 4z = 1992,$$
$$x(x-1) + y(y-1) + z(z-1) = 498. \qquad (1)$$

Bandykime (1) lygtyje x imti kuo didesnį. Matome, kad 22 dar gali tikti ($22 \cdot 21 = 462$), o 23 nebetinka ($23 \cdot 22 = 506$). Imame $x = 22$, tada

$$y(y-1) + z(z-1) = 36. \qquad (2)$$

Dabar didžiausias $y = 6$, tada $z = 3$. Taigi $1995 = 43^2 + 11^2 + 5^2$, ir įrodėme, kad uždavinio atsakymas — 3.

Atsakymas. 1995 galima išreikšti mažiausiai trijų kvadratų suma.

242. a) Mėginkime taip pildyti lentelę, kad pirmoje (iš apačios) eilutėje būtų skaičiai, ne didesni už 1, o antroje — ne didesni už 2 ir t. t. Tada pirmoje eilutėje rašome 1. Antroje negali stovėti du vienodi skaičiai, nes jų skirtumas lygus 0, taigi stovės 1 ir 2 (apskritai, niekur greta negalima statyti vienodų skaičių). Dėl simetrijos vistiek, kur statysime 1, kur 2, todėl imkime 2 kairiau:

```
2 1
 1
```

Virš 2 turi stovėti 3 ir 1. Bet jei imsime 3-1, gausime

```
3 1 2
 2 1
  1
```

Po kelių žingsnių įsitikinsime, kad taip lentelės neužpildysime. Iš tikrųjų, jei virš 3 imsime 4-1, turėsime

```
4 1 2 4
 3 1 2
  2 1
   1
```

ir jei imsime 5-1, tai bus

```
5 1 2 4 8
 4 1 2 4
  3 1 2
   2 1
    1
```

ir peržengėme 5 ribą, o jei imsime 1-5, tai bus

```
1 5 4 2 6
 4 1 2 4
  3 1 2
   2 1
    1
```

ir vėl peržengėme 5 ribą.

Panašiai (tik vargo dar daugiau) įsitikiname, kad ir imant 1-4, lentelės užpildyti nepavyksta. Bandykime variantą 1-3. Tada turime

```
1 3 2
 2 1
  1
```

Bandykime virš trejeto rašyti 4-1. Toliau eilutė užpildoma vienareikšmiškai:

```
3 4 1 3
 1 3 2
  2 1
   1
```

Jau galima bandyti atspėti taisyklę, kaip pildyti toliau: virš 1 buvo 2-1, virš 2 buvo 1-3, virš 3 yra 4-1, todėl virš 4 bandykime 1-5, tada eilutė užpildoma vienareikšmiškai:

```
4 1 5 4 1
 3 4 1 3
  1 3 2
   2 1
    1
```

Dabar virš 5 rašome 6-1, ir gauname

```
1 5 6 1 5
 4 1 5 4 1
  3 4 1 3
   1 3 2
    2 1
     1
```

Tuščiame dešiniajame kampe galima būtų rašyti tiek 4, tiek 6, bet aišku, kad 6 rašyti perspektyviau — patogu, kai skaičiai pradeda kartotis periodiškai. Dabar virš šešetų parašę 1-7, eilutę užpildome vienareikšmiškai:

```
 6 1 7 6 1 7
1 5 6 1 5 6
 4 1 5 4 1
  3 4 1 3
   1 3 2
    2 1
     1
```

tik kairiajame kampe pagal periodiškumą rašome 7.

Matome, kad taisyklė veikia: sekančioje eilutėje virš 7 rašome 8-1 ir periodiškai kas trys surašome skaičius,

```
8 1 7 8 1 7 8 1
 7 6 1 7 6 1 7
  1 5 6 1 5 6
   4 1 5 4 1
    3 4 1 3
     1 3 2
      2 1
       1
```

o dabar virš 8 rašome 1-9 ir vėl periodiškai skaičiais 1, 9, 8 užpildome eilutę:

```
1   9   8   1   9   8   1   9   8
  8   1   7   8   1   7   8   1
    7   6   1   7   6   1   7
      1   5   6   1   5   6
        4   1   5   4   1
          3   4   1   3
            1   3   2
              2   1
                1
```

b) Pradėkime pildyti lentelę nuo viršaus. Žinoma, atspėti, kaip ją reikia pildyti, sunku, bet iš esmės tai jau atlikome a) punkte. Rašykime pirmoje eilutėje skaičius $n, n-1$, 1 periodiškai. Tada antroje eilutėje gausime

$$1, n-2, n-1, 1, n-2, n-1, \ldots,$$

trečioje eilutėje — skaičius

$$n-3, 1, n-2, n-3, 1, n-2, \ldots.$$

Visose eilutėse iki $(n-2)$-os (t. y. iki trečios eilutės iš apačios) bet kurie du gretimi skaičiai bus skirtingi. Trečioje eilutėje iš apačios galimi 6 variantai — (132), (312), (213), (231), (123) ir (321). Pirmieji keturi atvejai „geri" — trikampio apačioje turėsime atitinkamai

```
1   3   2        3   1   2        2   1   3        2   3   1
  2   1            2   1            1   2            1   2
    1                1                1                1
```

Paskutiniai du atvejai „blogi" — trikampio apačioje turėsime

```
1   2   3        3   2   1
  1   1            1   1
    0                0
```

Bet juos galima „pataisyti", pradėjus pirmą eilutę antru skaičiumi $n-1$, 1, n, $n-1$, 1, $n \ldots$. Tada visos eilutės pasislinks per vieną skaičių, o „blogi" atvejai virs „gerais":

```
2   3   1        2   1   3
  1   2            1   2
    1                1
```

Atsakymas. a) Lentelės pirmą eilutę galima užpildyti taip: 1, 9, 8, 1, 9, 8, 1, 9, 8, o tolimesnėse eilutėse rašome atitinkamų skaičių skirtumus.

b) Visada. Kai $n = 6k+3$ ar $n = 6k+4$, tai pirmą eilutę galima pildyti taip: $n-1, 1, n, n-1, 1, n, \ldots$; likusiais atvejais galima imti $n, n-1, 1, n, n-1, 1, \ldots$, o kitas eilutes užpildyti atitinkamais skirtumais.

243. *Pirmas būdas.* Iš pradžių išspręskime daug lengvesnį uždavinį, kai $f : Z \to Z$ (t. y. kai tiek argumentai, tiek funkcijos reikšmės gali būti tik sveikieji skaičiai).

Iš sąlygos matome, kad labai paprasta apskaičiuoti funkcijos f reikšmę, kai argumentas — funkcijos f dviejų reikšmių suma, pavyzdžiui,

$$f(f(x) + f(y)) = x + y. \qquad (1)$$

Todėl pradinėje lygybėje patogu imti, pavyzdžiui, $a = b = f(x)+f(y)$. (Taip imti galima: $f(x)$ ir $f(y)$, taigi ir $f(x)+f(y)$ — sveikieji skaičiai; tai visą laiką reikia atsiminti.)

$$f(f(f(x)+f(y))+f(f(x)+f(y))) = f(x)+f(y)+f(x)+f(y),$$

t. y. $f(x+y+x+y) = 2f(x)+2f(y)$,

$$f(2x+2y) = 2f(x)+2f(y). \tag{2}$$

Imdami čia $x = y = 0$, gauname $f(0) = 4f(0)$, t. y.

$$f(0) = 0. \tag{3}$$

Dabar paėmę (1) lygybėje $y = 0$, gauname

$$f(f(x)) = x. \tag{4}$$

Todėl imdami pradinės lygybės kairės ir dešinės pusės funkciją, turime

$$f(f(f(a)+f(b))) = f(a+b),$$
$$f(a)+f(b) = f(a+b),$$

t. y.

$$f(a+b) = f(a)+f(b). \tag{5}$$

Dabar jau viskas paprasta: imdami čia $a = b = 1$, turime $f(2) = 2f(1)$; tada imdami $a = 1$, $b = 2$ turime

$$f(3) = f(1)+2f(1) = 3f(1);$$

imdami $a = 1$, $b = 3$, gauname

$$f(4) = f(1)+f(3) = 4f(1),$$

todėl, remiantis matematine indukcija, $f(n) = nf(1)$ kiekvienam natūraliajam n. Bet tada imdami $a = n$, $b = -n$ turime $f(0) = f(n)+f(-n)$, t. y. $f(-n) = -f(n) = -nf(1)$. Įsitikinome, jog kiekvienam $n \in \boldsymbol{Z}$ turime $f(n) = nf(1)$. Pažymėkime $f(1) = k$ ($k \in \boldsymbol{Z}$). Tada $f(k) = kf(1) = k^2$, o iš (4) lygties su $x = 1$ gauname $f(k) = 1$. Vadinasi, $k^2 = 1$, ir $k = \pm 1$. Todėl $f(n) = nf(1) = nk = n \cdot 1 = n$ arba $f(n) = nk = n(-1) = -n$.

Nesunku įsitikinti, kad abi šios funkcijos tenkina pradinę lygtį. Iš tikrųjų, jei $f(n) = n$, tai

$$f(f(a)+f(b)) = f(a+b) = a+b,$$

o jei $f(n) = -n$, tai

$$f(f(a)+f(b)) = f(-a-b) = a+b.$$

Uždavinys, kai $f : \boldsymbol{Z} \to \boldsymbol{Z}$, išspręstas. Grįžkime prie pradinio uždavinio. Čia (2) lygtį gauname taip pat, bet joje nebegalime (!) imti $x = y = 0$, taigi ne taip jau lengva būtų gauti (4) ir (5) lygtis. O štai (2) lygtis nėra patogi: čia turime tik lyginius argumentus.

Veiksime kiek kitaip, ir pradinėje lygybėje a ir b keisime ne vienodais argumentais, o skirtingais: imsime $a = f(x) + f(y)$, $b = f(z) + f(t)$. Tada gauname, kad

$$f(x + y + z + t) = f(x) + f(y) + f(z) + f(t). \tag{6}$$

Pasirodo, kad iš šios lygties išplaukia, jog $f(x) = x$. Įrodysime tai.

Imkime $y = z = t = x$, tada $f(4x) = 4f(x)$. Tada imdami $y = z = x$, $t = 4x$, turime

$$f(7x) = 3f(x) + f(4x) = 3f(x) + 4f(x) = 7f(x).$$

Dabar imame $y = z = t = 2x$, tada $f(7x) = f(x) + 3f(2x)$, o kadangi $f(7x) = 7f(x)$, tai $3f(2x) = 6f(x)$, $f(2x) = 2f(x)$. Dabar nesunku išsireikšti ir $f(3x)$: imame $y = x$, $z = 2x$, $t = 3x$, tada

$$f(7x) = f(x) + f(x) + f(2x) + f(3x),$$
$$7f(x) = f(x) + f(x) + 2f(x) + f(3x),$$

ir $f(3x) = 3f(x)$. Išsireiškus $f(x)$, $f(2x)$, $f(3x)$ ir $f(4x)$, nesunkiai išsireiškiame visus $f(nx)$. Pavyzdžiui,

$$f(5x) = f(x + x + x + 2x) = 3f(x) + f(2x) = 5f(x),$$
$$f(6x) = f(x + x + x + 3x) = 3f(x) + 3f(x) = 6f(x),$$
$$f(7x) = f(x + x + x + 4x) = 3f(x) + 4f(x) = 7f(x)$$

ir t. t. Taigi įrodėme, kad $f(n) = nf(1)$. Pažymėkime $f(1) = k$ ($k \in \boldsymbol{N}$, — tai svarbu!). Tada $f(n) = nk$. Vadinasi, pagal pradinę lygtį

$$a + b = f(f(a) + f(b)) = f(ka + kb) = k(ka + kb),$$

ir kadangi $a + b > 0$, tai $k^2 = 1$, $k = 1$. Taigi $f(n) = nk = n$.

Antras būdas. Paėmę pradinėje lygtyje $a = n$, $b = 1$, turime

$$f(f(n) + f(1)) = n + 1. \tag{7}$$

Nesunku įsitikinti, kad funkcijos f vienodas reikšmes atitinka vienodi argumentai. Iš tikrųjų, jei $f(x) = f(y)$, tai

$$x + 1 = f(f(x) + f(1)) = f(f(y) + f(1)) = y + 1,$$

ir $x = y$. Todėl, remiantis (7),

$$f(n) + f(1) = f(n - 1) + f(2) = \dots .$$

Tai reiškia, kad

$$f(n) - f(n - 1) = f(2) - f(1),$$

o tai, savo ruožtu, reiškia, kad seka $f(1), f(2), \ldots, f(n), \ldots$ yra aritmetinė progresija. Vadinasi,

$$f(n) = f(1) + (n-1)(f(2) - f(1)) = n(f(2) - f(1)) + 2f(1) - f(2).$$

Pažymėję $f(2) - f(1) = d$, $2f(1) - f(2) = c$, turime

$$f(n) = dn + c. \tag{8}$$

Dabar jau nesunku įrodyti, jog $d = 1$, o $c = 0$. Negali būti $d < 0$, nes tada pakankamai dideliems n bus $f(n) < 0$. Imkime pradinėje lygtyje $a = b = n$. Tada, keliskart pasirėmus (8) sąsaja,

$$\begin{aligned} &f(dn + c + dn + c) = 2n, \\ &f(2dn + 2c) = 2n, \\ &d(2dn + 2c) + c = 2n, \\ &2n(d^2 - 1) = -c - 2cd. \end{aligned} \tag{9}$$

Jeigu $d^2 \neq 1$, tai gautume

$$n = \frac{c + 2cd}{2(1 - d^2)},$$

o tokia lygybė galėtų būti teisinga tik vienam n. Vadinasi, $d^2 = 1$, o kadangi $d > 0$, tai $d = 1$. Tada (9) lygybė virsta $0 = -3c$, t. y. $c = 0$. Todėl iš (8) lygybės $f(n) = n$.

Atsakymas. Yra vienintelė tokia funkcija $f(n) = n$.

Pastaba. Pravartu išnagrinėti tą patį uždavinį, kai $f : \boldsymbol{R} \to \boldsymbol{R}$. Tada taip pat gauname (5) lygybę. Toliau darome panašiai. Imdami (5) lygybėje $a = b = x$, gauname $f(2x) = 2x$; dabar imdami $a = x$, $b = 2x$, gauname $f(3x) = 3f(x)$ ir t. t., t. y. $f(nx) = nf(x)$, $n \in \boldsymbol{N}$. Čia vietoje x imdami $\frac{x}{n}$, turime

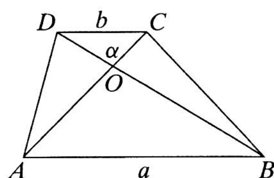
$$f(x) = nf\left(\frac{x}{n}\right), \quad \text{t. y.} \quad f\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n} f(x).$$

Pagaliau, vietoje x paėmę mx, $m \in \boldsymbol{N}$, gauname

$$f\left(\frac{m}{n}x\right) = \frac{1}{n} f(mx) = \frac{1}{n} mf(x) = \frac{m}{n} f(x).$$

Vadinasi, iš (5) lygybės su kiekvienu racionaliuoju $r \geqslant 0$ įrodėme lygybę $f(rx) = rf(x)$. Paėmę (5) lygybėje $a = rx$, $b = -rx$, gauname $f(-rx) = -rf(x)$, taigi lygybė $f(rx) = rf(x)$ teisinga su bet kuriuo racionaliuoju r. Taigi $f(r) = rf(1)$, ir jei $f(1)$ pažymėsime k, tai $f(r) = rk$ su bet kuriuo racionaliuoju r. Įdomu, kad jeigu teisinga (5) lygybė, tai iracionaliems x lygybė $f(x) = kx$ nebūtinai teisinga — yra žinomas (tiesa, labai sudėtingas) pavyzdys, kai funkcija $f(x)$ nėra pavidalo kx.

244. *Pirmas būdas.* Iš trikampių DOC ir AOB panašumo $\frac{OC}{AO} = \frac{OD}{BO} = \frac{b}{a}$, todėl (pažymėjus $\angle DOC = \alpha$)



$$\frac{S_{ABCD}}{S_{ABO}} = \frac{\frac{1}{2}AC \cdot BD \sin\alpha}{\frac{1}{2}AO \cdot BO \sin\alpha} = \frac{AO + OC}{AO} \cdot \frac{BO + OD}{BO} =$$
$$= \left(1 + \frac{OC}{AO}\right)\left(1 + \frac{OD}{BO}\right) = \left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{a^2}.$$

Vadinasi, ieškomasis plotų santykis

$$\frac{S_{ABO}}{S_{ABCD}} = \frac{a^2}{(a+b)^2}.$$

Antras būdas. Trikampiai ADO ir AOB turi bendrą aukštinę, todėl $S_{ADO} : S_{AOB} = DO : OB = b : a$, ir $S_{ADO} = \frac{b}{a} S_{AOB}$. Lygiai taip pat $S_{COB} = \frac{b}{a} S_{AOB}$. Kadangi trikampiai DOC ir AOB panašūs, tai

$$S_{DOC} : S_{AOB} = b^2 : a^2, \quad \text{ir} \quad S_{DOC} = \frac{b^2}{a^2} S_{AOB}.$$

Vadinasi,

$$S_{ABCD} = S_{AOB} + S_{BOC} + S_{COD} + S_{DOA} =$$
$$= S_{AOB} + \frac{b}{a} S_{AOB} + \frac{b^2}{a^2} S_{AOB} + \frac{b}{a} S_{AOB} =$$
$$= S_{AOB}\left(1 + \frac{b}{a}\right)^2 = \frac{(a+b)^2}{a^2} \cdot S_{AOB}.$$

Todėl

$$S_{AOB} : S_{ABCD} = \frac{a^2}{(a+b)^2}.$$

Atsakymas. $\frac{a^2}{(a+b)^2}$.

245. a) Tarkime, kad yra tokia pora $(x; y)$, kad $x > 3$. Kadangi ji turi tenkinti nelygybę $x + y \leqslant 1$, tai

$$3 + y < 1, \quad y < -2.$$

Kadangi ta pora turi tenkinti nelygybę $xy + x + y \geqslant -1$, o $y + 1 < 0$, tai

$$3(y+1) + y > x(y+1) + y = xy + x + y \geqslant -1,$$

ir $4y + 3 > -1$, $y > -1$. Tai prieštarauja nelygybei $y < -2$. Prieštara įrodo, kad porų $(x; y)$ su $x > 3$ nėra, taigi $M \leqslant 3$.

b) Tarkime, kad yra pora $(x; y)$ su $x > 2$. Panašiai kaip ir punkte a) gauname

$$x + y \leqslant 1, \quad 2 + y < 1, \quad y < -1, \quad y + 1 < 0.$$

Tada

$$2(y+1)+y > x(y+1)+y \geqslant -1, \quad 3y+2 > -1, \quad y > -1,$$

— prieštara. Vadinasi, $M \leqslant 2$.

c) Jeigu įrodysime, kad $M \geqslant 2$, tai, prisiminę punkte b) įrodytą nelygybę $M \leqslant 2$, gausime $M = 2$. Bet tam užteka įrodyti, kad yra tokių porų $(x; y)$ su $x = 2$. Rasti tokią porą nesunku: jei $x = 2$, tai iš pradinių nelygybių

$$-1 \leqslant 2+y \leqslant 1, \quad -1 \leqslant 2y+2+y \leqslant 1, \quad \text{t. y.}$$
$$-3 \leqslant y \leqslant -1, \quad -1 \leqslant y \leqslant -\frac{1}{3}.$$

Taigi reikiamą porą turime — tai $(2; -1)$, todėl $M = 2$.

Atsakymas. c) $M = 2$.

Pastaba. Sąlygoje netiesiogiai nurodyta, kad didžiausia x reikšmė egzistuoja. Beje, jei uždavinio sąlygoje nelygybes imtume griežtas, tokia reikšmė neegzistuotų: x galėtų įgyti kiekvieną reikšmę, mažesnę už 2, bet negalėtų įgyti reikšmės 2.

246. Valdingąjį skaičių padauginę iš 10^k ($k \in N$), vėl gausime valdingąjį skaičių ir atvirkščiai, nes prirašius tiek pat nulių prie dalinio ir daliklio, dalmuo nesikeičia. Todėl užtenka rasti tik nuliais nesibaigiančius valdinguosius skaičius.

Valdingąjį skaičių n prirašę prie bet kurio skaičiaus gausime skaičių, dalų iš n. Todėl ir $\overline{1n}$ dalysis iš n, o tada ir $\overline{1n} - n = 100\ldots0 = 10^p$ (p valdingojo skaičiaus n skaitmenų skaičius) dalijasi iš n. Ir atvirkščiai, jeigu 10^p dalijasi iš n, tai ir bet kuris skaičius $\overline{ab\ldots cn} = \overline{ab\ldots c} \cdot 10^p + n$ dalysis iš n. Bet 10^p dalijasi tik iš pavidalo $2^r \cdot 5^s$ skaičių, o kadangi n imame nedalius iš 10, tai n gali būti tik pavidalo 2^r arba 5^r ($r \geqslant 0$).

Raskime pavidalo $n = 2^r$ valdinguosius skaičius. Kai $r = 0$, tai skaičius $n = 1$ valdingas (bet kuris skaičius dalijasi iš 1). Kai $r = 1$, tai skaičius $n = 2$ valdingas ($10^p = 10$ dalijasi iš 2). Kai $r = 2$, tai $n = 2^2 = 4$ nėra valdingasis, nes $10^p = 10$ nesidalija iš 4. Aišku, kad ir kai $r \geqslant 3$, tai 10^p nesidalys iš 2^r; 10^p dalijasi tik iš 2^p, o $p < r$ (skaičiaus 2^r skaitmenų skaičius mažesnis už r:

$$2^r = 2^3 \cdot 2^{r-3} < 10 \cdot 10^{r-3} = 10^{r-2},$$

ir kadangi skaičius 10^{r-2} turi $r-1$ skaitmenį, tai ir 2^r skaitmenų skaičius ne didesnis už $r-1$, t. y. už r).

Dabar raskime pavidalo $n = 5^r$ valdinguosius skaičius. Kai $r = 1$, tai skaičius $n = 5$ valdingas ($10^p = 10$ dalijasi iš 5). Kai $r = 2$, tai $n = 5^2$ valdingas ($10^p = 100$ dalijasi iš 25). Kai $r = 3$, tai $n = 5^3$ valdingas ($10^p = 10^3$ dalijasi iš 125). Kai $r = 4$, tai $n = 5^4 = 625$ nėra valdingas, nes $10^p = 10^3$ nesidalija iš 5^4. Aišku, kad kai $r \geqslant 5$, tai $n = p^r$ nebus valdingas, nes 10^p nesidalys iš 5^r; 10^p dalijasi tik iš 5^p, o $p < r$ (skaičiaus 5^r skaitmenų skaičius mažesnis už r:

$$5^r = 5^4 \cdot 5^{r-4} < 10^3 \cdot 10^{r-4} < 10^{r-1},$$

ir kadangi 10^{r-1} yra mažiausias r-ženklis skaičius, tai 5^r turi mažiau negu r ženklų).

Taigi valdingieji skaičiai, kurie nesibaigia nuliais, yra 1, 2, 5, 25, 125. Prie kiekvieno iš jų galima prirašyti bet kiek nulių, ir vėl gausime valdingąjį skaičių. Todėl punkte a) ieškomi pirmieji 10 valdingųjų skaičių yra 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200. Punkte b) ieškomus visus valdinguosius skaičius galima užrašyti įvairiai, pavyzdžiui: 10^{k-1}, $2\cdot 10^{k-1}$, $25\cdot 10^{k-1}$, $125\cdot 10^{k-1}$, $k \in N$. Arba taip: $2^r\cdot 10^{k-1}$, $5^s\cdot 10^{k-1}$ ($r = 0, 1$; $s = 1, 2, 3$; $k \in N$).

Atsakymas. a) 1, 2, 5, 10, 20, 25, 50, 100, 125, 200. b) 10^{k-1}, $2\cdot 10^{k-1}$, $5\cdot 10^{k-1}$, $25\cdot 10^{k-1}$, $125\cdot 10^{k-1}$ ($k \in N$).

247. *Pirmas būdas.* Kampą, tarp įstrižainių pažymėkime α, įstrižainių ilgius — d_1 ir d_2. Tada plotas $S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha$, ir remiantis sąlyga bei vidurkių nelygybe

$$2 = S = \frac{1}{2}d_1d_2\sin\alpha \leqslant \frac{1}{2}\left(\sqrt{d_1d_2}\right)^2 \leqslant \frac{1}{2}\left(\frac{d_1+d_2}{2}\right)^2 = \frac{1}{2}\cdot 4 = 2.$$

Kadangi nelygybių kraštiniai nariai lygūs, tai ir visi nariai lygūs, todėl $\sin\alpha = 1$, ir $\alpha = 90^\circ$. Beje, taip pat $d_1 = d_2$, taigi trapecija lygiašonė.

Antras būdas. Galima apsieiti ir be trigonometrijos. Išveskime trapecijos įstrižainę d_1, o iš kitų dviejų trapecijos kampų nuleiskime į ją statmenis. Pažymėję statmenų ilgius h_1 ir h_2, turime

$$S = \frac{1}{2}d_1h_1 + \frac{1}{2}d_1h_2 = \frac{1}{2}d_1(h_1+h_2).$$

Kadangi $h_1 + h_2 \leqslant d_2$ (lygybė galima tik kai statmenys priklauso įstrižainei d_2), tai vėl

$$2 = S = \frac{1}{2}d_1(h_1+h_2) \leqslant \frac{1}{2}d_1d_2 \leqslant \frac{1}{8}(d_1+d_2)^2 \leqslant 2,$$

ir lygybė galima tik kai $h_1 + h_2 = d_2$ ir $d_1 = d_2$, t. y. kai įstrižainės statmenos ir lygios.

248. Įrodysime, kad bet kurių 6 iš eilės einančių skaičių suma lygi 6. Pažymėkime skaičius iš eilės $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$. Parašykime 100 nelygybių:

$$\begin{aligned} &a_1 + a_2 + \cdots + a_6 \leqslant 6,\\ &a_2 + a_3 + \cdots + a_7 \leqslant 6,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,\\ &a_{99} + a_{100} + a_1 + \cdots + a_4 \leqslant 6,\\ &a_{100} + a_1 + \cdots + a_5 \leqslant 6. \end{aligned}$$

Įrodysime, kad visos jos iš tikrųjų yra lygybės. Tikrai, tarkime, kad bent viena nelygybė griežta. Sudėkime visas 100 nelygybių. Kairėje pusėje sudėję panariui, gauname 6 visų skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{100}$ sumas, taigi gauname nelygybę $600 < 600$. Prieštara rodo, kad visos nelygybės iš tikrųjų yra lygybės, t. y. bet kurių 6 iš eilės einančių skaičių suma lygi 6.

Dabar įrodysime, kad bet kurių 4 iš eilės einančių skaičių suma lygi 4. Iš tikrųjų, jei tuos 4 skaičius $a_i, a_{i+1}, a_{i+2}, a_{i+3}$ papildysime iš eilės einančių skaičių šešetukais iki 100 skaičių, turėsime

$$a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} + 16\cdot 6 = 100,$$

taigi $a_i + a_{i+1} + a_{i+2} + a_{i+3} = 4$.

Dabar jau aišku, kad kiekvienų dviejų iš eilės einančių skaičių a_i ir a_{i+1} suma lygi 2: dvejetuką papildę iš eilės einančių skaičių ketvertuku, gausime šešetuką, todėl $a_i + a_{i+1} + 4 = 6$, $a_i + a_{i+1} = 2$.

Kadangi $a_1 = 6$, o $a_1 + a_2 = 2$, tai $a_2 = -4$, $a_3 = 6$, ir t. t. Vadinasi, šimtuko skaičiai eina pakaitomis: $6, -4, 6, -4, \ldots$.

Atsakymas. $6, -4, 6, -4, \ldots$.

249. *Pirmas būdas.* Kai kurios laikrodžio rodyklių padėtys neįmanomos: pavyzdžiui, negali vienu metu valandinė rodyklė būti nukreipta vertikaliai į viršų, o minutinė — vertikaliai žemyn (tada valandinė rodyklė „rodytų" sveikąjį valandų skaičių (12 val.), o minutinė „sakytų", kad yra pusė kažkurios valandos).

Įsivaizduokime, kad dabar yra t valandų (t nebūtinai sveikasis skaičius). Pagalvokime, kas atsitiktų, jei laikrodį „paleistume" eiti atgal: po t valandų jis rodytų 12 (arba 0) valandų, o dar po t valandų rodyklės užimtų padėtis, simetriškas pradinei padėčiai vertikaliosios tiesės atžvilgiu.

Visiškai aišku, kad tokia pat savybe pasižymi bet kuri tiesė, einanti sutapusių laikrodžio rodyklių kryptimi (laikrodžiui vis tiek, ar sutampančios rodyklės rodo 12 val., ar kurį kitą laiką). Nesunku suskaičiuoti, kiek bus tokių tiesių, ir nesudarant lygties: aišku, kad 1 val. 5 min. minutinė rodyklė „vysis" valandinę (minutinė rodyklė rodys 1 val., valandinė — kiek daugiau), o 10 min. po pirmos jau bus ją aplenkus (nes minutinė „rodys" 3 val., o valandinė — mažiau kaip 2). Taigi po dvyliktos valandos pirmą kartą rodyklės sutaps tarp 1 h 5 min ir 1 h 10 min. Toliau jos sutaps vienodais intervalais, vadinasi, tarp 2 h 10 min ir 2 h 20 min (o tiksliau, iki 2 h 15 min, nes minutinė jau aplenkus valandinę rodyklę); po to tarp 3 h 15 min ir 3 h 25 min, tarp 4 h 20 min ir 4 h 30 min (tiksliau 4 h 25 min, nes minutinė jau aplenkus valandinę), tarp 5 h 25 min ir 5 h 35 min (tiksliau 5 h 30 min), tarp 6 h 30 min ir 6 h 40 min (tiksliau 6 h 35 min), tarp 7 h 35 min ir 7 h 40 min, tarp 8 h 40 min ir 8 h 45 min, tarp 9 h 45 min ir 9 h 50 min, tarp 10 h 50 min ir 10 h 55 min, tarp 11 h 55 min ir 12 h 05 min (o tiksliai — 12 h!). Taigi tokių tiesių per ciferblatą eina 11.

Liko įrodyti, kad daugiau tokių tiesių nėra. Tarkime, kad radome norimą tiesę. Imkime laiko momentą; kai valandinė rodyklė nukreipta ta tiese. Kadangi valandinė rodyklė apsprendžia minutinės rodyklės vienintelę galimą padėtį, tai minutinės rodyklės padėtis ir simetriška padėtis turi sutapti. Vadinasi, ir minutinė rodyklė yra toje tiesėje. Kai minutinė rodyklė ir valandinė nesutampa, o rodo diametraliai priešingas kryptis, tai nėra nauja tiesė — po 6 valandų rodyklės bus toje pačioje tiesėje ir „žiūrės" į tą pačią pusę. Taigi yra tik 11 tiesių, tenkinančių uždavinio sąlygą.

Antras būdas. (Plg. [1], 303 uždavinį). Tarkime, kad nuo 0 val. praėjo t valandų (žinoma, t nebūtinai sveikasis skaičius). Kadangi per 12 h valandinė rodyklė apsuka ratą, tai po 1 h ji „rodo" 30° kampą. Vadinasi, per t valandų ji nueina $30^\circ t$ kampą. Per tą laiką minutinė rodyklė nueina 12 kartų daugiau (nes ji apsuka ratą per 1 h), taigi nueina $360^\circ t$ kampą. (Iš tikrųjų mes matome $360^\circ - 360^\circ \cdot [t]$ kampą ($[t]$ — sveikoji t dalis), bet tai nesvarbu.)

Sakykime, kad ieškomoji tiesė eina x° kampu. Tos tiesės atžvilgiu simetriška valandinės rodyklės padėtis bus $x^\circ + (x^\circ - 30^\circ t) = (2x - 30t)^\circ$ (nebaisu, net jeigu tas skaičius neigiamas — galime nagrinėti ir neigiamąjį kampą), o minutinės rodyklės $x^\circ + (x^\circ - 360^\circ t) = (2x - 360t)^\circ$. Bet valandinė rodyklė apsprendžia minutinės rodyklės padėtį,

todėl kai valandinė rodyklė rodo $(2x - 30t)^\circ$, tai minutinė turi rodyti 12 kartų daugiau, t. y. $(24x - 360t)^\circ$. Bet abi apskaičiuotos minutinės rodyklės padėtys turi sutapti, t. y. skirtis 360° kartotiniu, taigi

$$24x - 360t = 24x - 360t + 360n,$$
$$22x = 360n,$$
$$x = \frac{360n}{22}.$$

Jeigu kalbėtume apie tiesės spindulį, šios reikšmės, imant n nuo 0 iki 21, užduotų 22 skirtingas padėtis (imant kitas n reikšmes, padėtys pradeda kartotis). Bet kadangi iš šių spindulių po 2 yra vienoje tiesėje, tai mums patogu imti reikšmes $n = 0, 2, \ldots, 20$, kitaip sakant, $n = 2k$, $k = 0, 1, \ldots, 10$. Tada gauname 11 skirtingų tiesių padėčių

$$x^\circ = \frac{360^\circ k}{11}, \quad k = 0, 1, \ldots, 10. \tag{1}$$

[Nesunku pastebėti, kad tai padėtys, kuriose laikrodžio rodyklės sutampa. Iš tikrųjų, laikrodžio rodyklės sutampa spindulyje 0°, po to jos sutaps, kai minutinė rodyklė aplenks valandinę 1, 2, 3, ... apskritimais, t. y. kai

$$360^\circ t = 30^\circ t + 360^\circ k,$$

$330t = 360k$, $t = \frac{12k}{11}$, ir matome, kad rodyklės sutampa kas $\frac{12}{11}$ val., arba kas $\frac{360^\circ k}{11}$.]

Liko įsitikinti, kad kiekvieną iš (1) padėčių atitinkanti tiesė tenkina uždavinio sąlygą. Iš tikrųjų, jei laikrodis rodo laiką t, tai valandinė rodyklė rodo $30^\circ t$, minutinė $360^\circ t$ kampą. Perstačius rodykles simetriškai tiesės $x = \frac{360^\circ k}{11}$ atžvilgiu, valandinė rodyklė užims

$$\frac{360^\circ k}{11} + \left(\frac{360^\circ k}{11} - 30^\circ t\right)$$

padėtį, o minutinė

$$\frac{360^\circ k}{11} + \left(\frac{360^\circ k}{11} - 360^\circ t\right)$$

padėtį. Jei valandinės rodyklės kampas $\frac{720^\circ k}{11} - 30^\circ t$ neigiamas, jį galima padaryti teigiamu, pridėjus $360^\circ n$. Atitinkamas minutinės rodyklės kampas tada turi būti

$$12\left(\frac{720^\circ k}{11} - 30^\circ t + 360^\circ n\right),$$

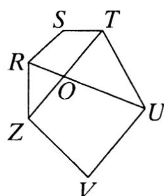
ir jis iš tikrųjų skiriasi nuo kampo $\frac{720^\circ k}{11} - 360^\circ t$ pilnais apskritimais:

$$12\left(\frac{720^\circ k}{11} - 30^\circ t + 360^\circ n\right) - \left(\frac{720^\circ k}{11} - 360^\circ t\right) = 720^\circ k + 360^\circ n.$$

Atsakymas. Yra 11 tokių tiesių. Tai tiesės, kuriose sutampa laikrodžio rodyklės. Jos eina per ciferblato centrą ir sudaro su vertikaliąja tiese kampus $\frac{360^\circ n}{11}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots, 10)$.

XLV OLIMPIADA (1996 m.)

250. Parašykime akivaizdžias nelygybes (žr. pav.)



$$RU < RS + ST + TU, \quad RU < RZ + ZV + VU.$$

Jas sudėję, turime $2RU < P$. Analogiškai $2ZT < P$, $2SV < P$. Sudėję tris pastarąsias nelygybes, gauname

$$2D < 3P, \quad \text{t. y.} \quad \frac{2}{3} < \frac{P}{D}.$$

Kita vertus, $RU + TZ = (RO + OZ) + (TO + OU) > RZ + TU$. Analogiškai

$$RU + SV > RS + VU, \quad TZ + SV > TS + VZ.$$

Sudėję visas tris nelygybes, turime

$$2D > P, \quad \text{t. y.} \quad \frac{P}{D} < 2.$$

251. Surašykime skaičius nuo 1 iki 1999; (pamatysime, kad tai patogiau, negu surašyti juos iki 1996) stulpeliu žemyn (prirašyti nuliai sumos nekeičia):

0000
0001
0002
0003
⋮
0009
0010
0011
⋮
0099
0100
⋮
0999
1000
⋮
1999

Sumuodami skaitmenis atskirais stulpeliais, turime

$$\begin{aligned} S(1999) = {} & 200(0+1+\cdots+9)+ \\ & +200(0+1+\cdots+9)+ \\ & +200(0+1+\cdots+9)+ \\ & +1000(0+1) = \\ = {} & 200\cdot 45\cdot 3+1000 = 28\,000. \end{aligned}$$

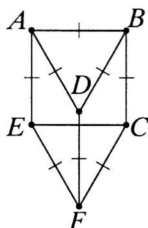
Iš gautos sumos atmetame nereikalingų skaičių 1997, 1998, 1999 skaitmenų sumą:

$$S(1996) = 28\,000-(1+9+9+9)-(1+9+9+8)-(1+9+9+7) = 27\,919.$$

Atsakymas. 27 919.

252. a) Jei suskaičiuosime kiekvienam apskritimui jo lietimosi su kitais apskritimais taškų skaičių ir šiuos skaičius sudėsime, tai gausime dvigubą bendrų lietimosi taškų skaičių (nes kiekvienas jų buvo įskaičiuotas lygiai du kartus). Taigi atvejis, kai kiekvienas iš 5 apskritimų liečia lygiai tris, negalimas, nes skaičius $5\cdot 3 = 15$ — nelyginis.

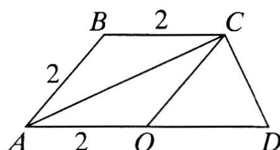
b) Jeigu šešių apskritimų centrai yra taškai A, B, C, D, E, spinduliai — 1 (žr. pav., čia $ABCE$ — kvadratas, ABD, ECF — lygiakraščiai trikampiai, visos pavaizduotos atkarpos yra ilgio 2), tai uždavinio sąlygos akivaizdžiai išpildytos.



253. *Pirmas būdas.* Padalykime atkarpą VK (Vilnius–Kaunas) į tris lygias dalis taškais A ir B. (Galite pasidaryti brėžinį.) Jei keliautojas taške A atsidūrė dienos pabaigoje, tai $VA = \frac{1}{3}VK$, $AK = \frac{2}{3}VK$, ir sąlyga išpildyta. Jei keliautojas praėjo tašką A dieną, tai tos dienos pabaigoje jis buvo nutolęs nuo abiejų miestų ne mažiau kaip $\frac{1}{3}$ viso kelio. Iš tikrųjų, vakare jis negalėjo būti Kaune, nes būtų per dieną nuėjęs atstumą, didesnį už $AK = \frac{2}{3}VK$. Taip pat jis negalejo būti tarp B ir Kauno, nes tada jis butų per dieną nuėjęs atstumą, didesnį už $AB = \frac{1}{3}VK$, o kitą dieną — atstumą, mažesnį už $BK = \frac{1}{3}VK$. Taigi tos dienos vakare jis būtų tarp A ir B.

Antras būdas. Jei paskutinę dieną keliautojas įveikė mažiau kaip $\frac{1}{3}$ kelio, tai ir kitas dienas jis įveikdavo mažiau kaip $\frac{1}{3}$, todėl jis negalėjo per dieną įveikti atkarpos AB, ir kurios nors dienos pabaigoje bus AB vidiniame taške. Jei paskutinę dieną jis nuėjo $\geqslant \frac{1}{3}$ kelio, tai priešpaskutinės dienos vakare jis buvo taške B arba jo kairėje. Jis negalėjo būti į kairę nuo A, nes būtų paskutinę dieną nuėjęs $> \frac{2}{3}$ kelio. Vadinasi, priešpaskutinės dienos pabaigoje jis buvo atkarpoje AB, o tai reiškia, kad jis buvo nutolęs nuo abiejų miestų ne mažiau kaip $\frac{1}{3}$ kelio.

254. Sakykime, kad O — pagrindo AD vidurys (žr. pav.).



Tuomet $AO = \frac{AD}{2} = BC$. Vadinasi, $ABCO$ — lygiagretainis, ir tuomet $CO = AB = AO = DO$. Todėl trikampiai AOC ir COD — lygiašoniai, ir $2\angle ACD = \angle ACD + \angle ACO + \angle OCD = \angle ACD + \angle CAD + \angle ADC = 180°$. Taigi $\angle ACD = 90°$.

Atsakymas. $\angle ACD = 90°$.

255. Pažymėkime skliaustuose esantį daugianarį $P(x)$. Daugianario

$$P^2(x) = (1 + 2x - x^2 + 3x^3 + 3x^4)^2$$

visi koeficientai teigiami: pakėlę kvadratu pagal formulę

$$(a+b+c+d+e)^2 = a^2 + b^2 + c^2 + d^2 + e^2 + 2ab + 2ac + 2ad + 2ae + \\ + 2bc + 2bd + 2be + 2cd + 2ce + 2de$$

(arba tiesiog padauginę $P(x)$ iš $P(x)$) gauname

$$P^2(x) = 1 + 4x + 2x^2 + 2x^3 + 19x^4 + 6x^5 + 3x^6 + 18x^7 + 9x^8.$$

Taip pat teigiami ir daugianario $P^3(x)$ koeficientai:

$$P^3(x) = P^2(x) \cdot P(x) = (1 + 4x + 2x^2 + 2x^3 + 19x^4 + 6x^5 + 3x^6 + 18x^7 + 9x^8) \\ (1 + 2x - x^2 + 3x^3 + 3x^4) = \\ = 1 + 6x + 9x^2 + 5x^3 + 36x^4 + 60x^5 + 8x^6 + 81x^7 + 117x^8 + 27x^9 + 54x^{10} + \\ + 81x^{11} + 27x^{12}.$$

Dabar užtenka atskirai išnagrinėti lyginius ($2k$, $k \geqslant 2$) ir nelyginius ($2k+1$, $k \geqslant 2$) numerius. Kai $n = 2k$, tai $P^{2k}(x) = [P^2(x)]^k$, o kai $n = 2k+1$, tai $P^{2k+1}(x) = (P^2(x))^{k-1} \cdot P^3(x)$. Kadangi visų dauginamų daugianarių koeficientai teigiami, tai teigiami ir visų $P(x)$ laipsnių koeficientai.

256. (Plg. [1], 1306 uždavinį). Sakykime, kad skaičius 365 išreikštas n skirtingų kvadratų suma:

$$365 = a_1^2 + a_2^2 + \cdots + a_n^2.$$

Galime laikyti, kad $a_1 < a_2 < \cdots < a_n$. Tada $a_1 \geqslant 1$; $a_2 > a_1 \geqslant 1$, $a_2 > 1$ ir $a_2 \geqslant 2$; tęsdami gauname, kad $a_3 \geqslant 3, \ldots, a_n \geqslant n$. Todėl

$$365 \geqslant 1^2 + 2^2 + \cdots + n^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}, \quad n(n+1)(2n+1) \leqslant 2190,$$

o tai reiškia, kad $n \leqslant 9$ (jei $n \geqslant 10$, tai $n(n+1)(2n+1) \geqslant 10 \cdot 11 \cdot 21 = 2310$). Vadinasi, dėmenų gali būti ne daugiau kaip 9 (bet dar nežinome, ar iš 9 dėmenų galima sudaryti reikiamą sumą).

Įrodysime, kad reikiamą sumą sudaryti iš 9 dėmenų galima. Kadangi $1^2+2^2+\cdots+9^2 = \frac{9\cdot10\cdot19}{6} = 15\cdot19 = 17^2-2^2 = 285$, tai šią sumą reikia „paauginti" 80 vienetų. Pabandykime išbraukti kurį nors kvadratą, o vietoj jo įrašyti 80 vienetų didesnį kvadratą. Tai padaryti galima pirmą dėmenį 1^2 pakeitus 9^2 — šių kvadratų skirtumas lygus 80. Bet tada sumoje atsirastų du vienodi kvadratai. Eikim toliau. Pridėję 2^2 prie 80, gauname 84, o tai nėra kvadratas. Lygiai taip pat nėra kvadratai 3^2+80, 4^2+80, 5^2+80, 6^2+80, 7^2+80. O štai $8^2+80=144=12^2$ yra kvadratas. Taigi 365 išreikšti devynių skirtingų kvadratų suma galima taip:

$$365 = 1^2+2^2+3^2+4^2+5^2+6^2+7^2+9^2+12^2.$$

Vadinasi, daugiausiai sumoje gali būti 9 dėmenys.

Atsakymas. Devyni.

257. Žr. 252 uždavinį.

258. Sudarykime kuo daugiau skaičių porų taip, kad dviejų poros skaičių suma būtų kvadratas: (2, 7), (3, 6), (5, 11), (12, 13). (Žinoma, keturias poras galima sudaryti ir kitaip). Tada galutiniame rinkinyje liks ne daugiau kaip po 1 kiekvienos poros skaičių. Taigi rinkinyje gali likti ne daugiau kaip 6 skaičiai.

Tarkime, kad rinkinyje liks 6 skaičiai. Tai reiškia, kad liks skaičiai 8, 10 ir iš kiekvienos poros lygiai po vieną skaičių. Bet skaičiaus 6 neliks (nes $10+6=16$), taigi 3 liks, 13 neliks ($13+3=16$), o 12 liks. Bet tada $3+10+12=25$, — prieštara. Taigi 6 skaičiai likti rinkinyje negali.

Dabar užtenka įsitikinti, kad iš rinkinio 3, 7, 8, 11, 12 skaičių neįmanoma sudaryti sumos, lygios skaičiaus kvadratui (patikrinkite, kad jokių dviejų, jokių trijų, jokių keturių skaičių suma, visų penkių skaičių suma nėra pilnasis kvadratas).

Vadinasi, rinkinyje daugiausiai gali likti penki skaičiai.

Atsakymas. Penki skaičiai (3, 7, 8, 11, 12).

259. Sprendimą sudaro dvi dalys. Iš pradžių įrodysime, kad Sizifas gali užkelti akmenį ant $2n$-to laiptelio, kad ir kaip žaistų kipšiukas. Tam nurodysime, kaip turi elgtis Sizifas (sakoma, kad nurodysime Sizifo strategiją). Po to įrodysime, kad Sizifas negali užkelti akmens aukščiau negu iki $2n$-to laiptelio. Tam nurodysime, kaip turi elgtis kipšiukas (t. y. nurodysime kipšiuko strategiją).

1) *Sizifas gali pasiekti $2n$-tą laiptelį.* Pavadinkime k-bloku grupę iš k akmenų, stovinčių ant laiptelių iš eilės be tarpų, jei iš abiejų grupės pusių laiptelis tuščias (arba iš vienos pusės laiptelio iš viso nebėra; pavyzdžiui, pradinėje padėtyje akmenys sudaro n-bloką). Sizifui užtenka laikytis tokios strategijos: *kelti į viršų aukščiausiai esančio bloko apatinį akmenį.* Tada po pirmo ėjimo $1 \to n+1$ S(izifas) užims $n+1$ laiptelį, o viršuje bus n-blokas. Po (vienintelio) K(ipšiuko) ėjimo $2 \to 1$ viršuje bus $(n-1)$-blokas. Po antro ėjimo $3 \to n+2$ S užims $n+2$ laiptelį, turėdamas $(n-1)$-bloką, o po K atsakymo blokas gali sutrumpėti tik vienetu, t. y. būti $(n-2)$-bloku. Po trečio ėjimo S pasieks $(n+3)$-čią laiptelį, o po K atsakymo turės ne trumpesnį kaip $(n-3)$-bloką. Po $(n-2)$-o ėjimo S pasieks $(2n-2)$-ą laiptelį ir po K atsakymo turės ne trumpesnį kaip 2-bloką. Po $(n-1)$-mo ėjimo S pasieks $(2n-1)$-mą laiptelį ir turės 2-bloką, o K galės jį sutrumpinti tik iki

1-bloko. Taigi prieš n-tą ėjimą ant $(2n-1)$-mo laiptelio stovės akmuo, ir S galės n-tu ėjimu jį perkelti ant $2n$-to laiptelio.

2) *Kipšiukas gali neleisti Sizifui pakilti aukščiau negu iki 2n-to laiptelio.* Tai pasiekti jis gali, laikydamasis tokios strategijos: *ritinti žemyn apatinį akmenį iš to bloko, kuriame yra ką tik Sizifo užritintas akmuo.* Nesunku įsitikinti, kad taip darydamas K pasiekia, jog po kiekvieno jo ėjimo pirmas laiptelis bus užimtas ir niekur nebus dviejų tuščių laiptelių iš eilės: jei S pirmu ėjimu ima 1 laiptelio akmenį, tai K atsako ėjimu $2 \to 1$; jei S ima k-to laiptelio akmenį, tai po jo ėjimo $k \to n+1$ K atsako ėjimu $k+1 \to k$. Lygiai taip pat ir vėliau dviejų tuščių laiptelių iš eilės atsirasti negali: jei S paima 1-ą akmenį, tai K grąžina jį ėjimu $2 \to 1$; jei S padaro ėjimą $a \to b$, tai du iš eilės tušti laipteliai galėtų, būti tik $a-1$ ir a, bet tada K eina $a+1 \to a$. Taigi po kiekvieno K ėjimo pirmas laiptelis bus užimtas, ir jei akmenys sudaro m blokų, tai tarp jų tuščių laiptelių lygiai $m-1$, t. y. paskutinis akmuo yra ne aukščiau kaip $n+m-1 \leqslant 2n-1$ vietoje. Beje, galėjo būti, kad paskutiniu ėjimu kipšiukas nukėlė akmenį nuo $2n$-to laiptelio ant $(2n-1)$-mo.

Atsakymas. Ant $2n$-to laiptelio.

260. *Pirmas būdas.* Pamėginkime spręsti uždavinį perrankos būdu.

Kai $y=1$, gauname lygtį $x^3-1=x+61$, $x^3-x=62$, $x(x^2-1)=62$. Kai x natūralieji, kairė pusė didėjanti funkcija. Bet su $x=4$ ji lygi 60 ir dar per maža, o su $x=5$ lygi 120 ir jau per didelė. Taigi lygtis $x(x^2-1)=62$ natūraliųjų sprendinių neturi, todėl su $y=1$ duotosios lygties sprendinių nėra.

Kai $y=2$, gauname lygtį $x^3-8=2x+61$, $x(x^2-2)=69$. Kai x natūralieji, kairė pusė yra didėjanti funkcija. (Dėmesio — taip nėra su x sveikaisiais: kai $x=-1$, tai ji lygi 1; kai $x=0$, — lygi 0; kai $x=1$, — lygi -1; kai $x=2$, — lygi 4; taigi $x(x^2-2)$ nėra nei didėjanti, nei mažėjanti funkcija.) Bet su $x=4$ ji lygi 56 ir dar per maža, o su $x=5$ lygi 115 ir jau per didelė.

Kai $y=3$, gauname lygtį $x(x^2-3)=88$, kuri natūraliųjų sprendinių neturi (patikrinkite).

Kai $y=4$, gauname lygtį $x(x^2-4)=152$, sprendinių nėra.

Kai $y=5$, gauname lygtį $x(x^2-5)=186$. Kai $x=5$, tai kairė pusė lygi 100 ir dar per maža.

O štai kai $x=6$, tai ji lygi 186. Taigi radome vieną sprendinį. Daugiau sprendinių nėra, nes su $x \geqslant 7$ kairė pusė bus per didelė.

Lygiai taip pat galima įsitikinti, kad sprendinių negausime, kai $y=6$, $y=7$. Beje, kai $y=8$, mūsų laukia šioks toks nemalonumas: gauname lygtį $x(x^2-8)=573$, kurios kairė pusė *nėra* didėjanti funkcija: taške $x=1$ ji lygi -7, o taške $x=2$, lygi -8. Tiesa, tą sunkumą įveikti nesunku: mus domina tik tos x reikšmės, kai x^2-8 teigiamas, o tada dviejų *teigiamųjų* didėjančių funkcijų sandauga $x(x^2-8)$ bus didėjanti funkcija. Dabar taške $x=8$ ji lygi 448 ir dar per maža, o taške $x=9$ lygi 657 ir jau per didelė.

Šitaip mes galėtume patikrinti dar keletą y reikšmių, bet niekada nepatikrinsime *visų* reikšmių. Va štai čia ir kyla mintis: jei mums būtų pasakyta, kad, pavyzdžiui, $y \leqslant 10$, tai uždavinį išspręsti mokėtume — patikrintume dar $y=9$ ir $y=10$ ir įsitikintume, kad daugiau sprendinių nebegauname.

O dabar kita mintis — gal mes galime įrodyti, kad, pavyzdžiui, $y \leqslant 10$? Pasirodo, kad tai padaryti tikrai galima. Išskaidykime pradinės lygties kairiąją pusę:

$$(x-y)(x^2+xy+y^2) = xy + 61. \qquad (1)$$

Matome, kad $x - y > 0$, — kitaip kairioji pusė nebūtų teigiama, o dešinioji — būtų. Bet $x - y$ sveikas skaičius ir $x - y > 0$, todėl $x - y$ natūralusis skaičius, ir $x - y \geqslant 1$. (Labai gražus ir dažnai taikomas samprotavimas.) Atmetę (1) lygybės kairiojoje pusėje daugiklį $x - y$, gausime nelygybę

$$x^2+xy+y^2 \leqslant xy+61,$$
$$x^2+y^2 \leqslant 61. \qquad (2)$$

Iš čia matome, kad $y^2 \leqslant 61$, $y \leqslant 7$. Tai reiškia, kad jeigu pradinė lygtis turi sprendinių, tai tik su $y \leqslant 7$. Bet tokius y jau patikrinome, ir radome vienintelį sprendinį $x = 6$, $y = 5$.

(Beje, tikrinti y reikšmių galima dar mažiau: kadangi buvome nustatę, kad $x - y \geqslant 1$, tai $x \geqslant y + 1$, ir iš (2) nelygybės turime

$$(y+1)^2 + y^2 \leqslant 61.$$

Matome, kad $y \leqslant 5$: jei $y \geqslant 6$, tai $(y+1)^2 + y^2 \geqslant 7^2 + 6^2 > 61$. Vadinasi, iš tikrųjų patikrinti reikia tik reikšmes $y \leqslant 5$.)

Antras būdas. Čia beveik nereikalinga perranka. Kadangi $x > y$, tai $x = y + t$, t — sveikas, $t \geqslant 1$. Įsistatome $x = y + t$ į (1) lygtį:

$$t(3y^2+3yt+t^2) = y^2+ty+61,$$
$$t^3+3yt^2+3y^2t = y^2+ty+61.$$

Perrašykime lygtį taip:

$$t^3 + ty(3t-1) + y^2(3t-1) = 61.$$

Visi kairės pusės dėmenys teigiami, todėl $t^3 < 61$, $t \leqslant 3$.

Kai $t = 3$, tai $8y^2 + 24y = 34$, ir sprendinių nėra, nes kairė pusė dalijasi iš 8, o dešinė — ne.

Kai $t = 2$, tai $5y^2 + 10y = 53$, ir dešinė pusė nesidalija iš 5.

Kai $t = 1$, tai $2y^2 + 2y = 60$, $y(y+1) = 30$, $y = 5$. Tada $x = y + t = 6$, ir gauname vienintelį sprendinį (6; 5).

Atsakymas. (6; 5).

261. *Pirmas būdas.* Sudedame duotąsias lygybes: $a_{n+1} + b_{n+1} = (a_n + b_n) + \left(\frac{1}{a_n} + \frac{1}{b_n}\right)$.

Keliame kvadratu ir remiamės nelygybe $x + \frac{1}{x} \geqslant 2$ $(x > 0)$:

$$(a_{n+1}+b_{n+1})^2 = (a_n+b_n)^2 + +\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right)^2 + 2(a_n+b_n)\left(\frac{1}{a_n}+\frac{1}{b_n}\right) >$$
$$> (a_n+b_n)^2 + 2\left(2+\frac{a_n}{b_n}+\frac{b_n}{a_n}\right) \geqslant (a_n+b_n)^2 + 8.$$

Nuosekliai taikydami gautąją nelygybę, turime:

$$(a_{n+1}+b_{n+1})^2 > (a_n+b_n)^2+8 > (a_{n-1}+b_{n-1})^2+2\cdot 8 > \cdots >$$
$$> (a_2+b_2)^2+(n-1)\cdot 8 = \left(a_1+\frac{1}{a_1}+b_1+\frac{1}{b_1}\right)^2+8(n-1) \geqslant$$
$$\geqslant 16+8(n-1) = 8(n+1), \quad \text{kai } n \geqslant 1.$$

Paėmę $n = 24$, gauname

$$(a_{25}+b_{25})^2 > 200, \quad a_{25}+b_{25} > 10\sqrt{2}.$$

Antras būdas. $a_{n+1}b_{n+1} = \left(a_n+\frac{1}{b_n}\right)\left(b_n+\frac{1}{a_n}\right) = a_nb_n+2+\frac{1}{a_nb_n} > a_nb_n+2$. Nuosekliai taikydami šią nelygybę, gauname: $a_{n+1}b_{n+1} > 2+a_nb_n > 4+a_{n-1}b_{n-1} > \cdots > 2(n-1)+a_2b_2 = 2(n-1)+a_1b_1+2+\frac{1}{a_1b_1} \geqslant 2(n+1)$. Kai $n = 24$, turime $a_{25}b_{25} > 50$, o remdamiesi vidurkių teorema, — kad $a_{25}+b_{25} \geqslant 2\sqrt{a_{25}b_{25}} > 2\sqrt{50} = 10\sqrt{2}$.

262. Sakykime, kad pirmas žaidėjas įrašo bet kokį skaičių į kairįjį viršutinį langelį. Likusius langelius suskirstykime po 2 langelius taip, kaip vienodomis raidėmis parodyta viduriniajame piešinyje. Dabar po kiekvieno antro žaidėjo ėjimo pirmas įrašo tokį pat skaičių į langelį, esantį poroje su pirmojo užimtu langeliu. Aišku, kad bet kuris trejetas $(0, t, -t)$ yra sistemos sprendinys. (Primename, kad nenulinis sprendinys (x, y, z) — tai sprendinys, kurio bent vienas iš skaičių x, y ir z nelygus nuliui.)

a_{11}	a_{12}	a_{13}
a_{21}	a_{22}	a_{23}
a_{31}	a_{32}	a_{33}

$*$	α	α
δ	β	β
δ	γ	γ

α	δ	α
β	δ	β
γ	$*$	γ

Beje, pirmas žaidėjas pirmu ėjimu gali užimti bet kurį langelį. Tada langelius suskirstorne į poras taip: į vieną porą įjungiame langelius, esančius tame pačiame stulpelyje kaip ir užimtasis, o kitas poras sudarome iš likusių dviejų kiekvienos eilutės langelių (dešiniajame piešinyje tai pavaizduota, kai pirmu ėjimu užimamas trečios eilutės antro stulpelio langelis — šiuo atveju sistema turės sprendinius $(t, 0, -t)$). Jeigu pirmu ėjimu užimamas trečio stulpelio langelis, tai sistema turėtų sprendinius $(t, -t, 0)$.

Atsakymas. Taip, visada.

263. Tarkime, kad F — tai n-kampis, kurio kraštinių ilgių kvadratų surna didžiausia. Jei $n \geqslant 5$, tai n-kampio kampų suma lygi $(n-2)180^\circ$, kampų aritmetinis vidurkis lygus $180^\circ - \frac{360^\circ}{n} > 90^\circ$, n-kampyje yra bukasis kampas. Pažymėkime bukąjį kampą ABC (galite pasidaryti brėžinį). Pagal kosinusų teoremą $AC^2 > AB^2 + BC^2$, todėl išmetę iš daugiakampio viršūnę B, padidinsie daugiakampio kraštinių kvadratų sumą. Prieštara rodo, kad $n \leqslant 4$, t. y. arba $n = 4$, arba $n = 3$. Bet jeigu tai keturkampis, tai F negali turėti bukojo kampo, todėl F arba stačiakampis, arba trikampis. Jei R — apskritimo spindulys, tai stačiakampio atveju kraštinių kvadratų suma lygi $8R^2$, o taisyklingojo trikampio atveju — $9R^2$. Vadinasi, jeigu F egzistuoja, tai jis yra trikampis.

(Beje, teiginys, kad egzistuoja trikampis, kurio kraštinių kvadratų suma didžiausia, nėra akivaizdus. Pavyzdžiui, neegzistuoja daugiakampis (ar trikampis), kurio kraštinių kvadratų suma mažiausia, nes n-kampį galima įbrėžti į kiek norint mažo ilgio lanką.)

Dabar įrodysime, kad iš visų trikampių, įbrėžtų duotąjį apskritimą, didžiausią kraštinių kvadratų sumą turi lygiakraštis trikampis. Sakykime, kad apskritimo centras O, o trikampio viršūnės — A, B, C. Pažymėkime $\vec{a} = \overrightarrow{OA}$, $\vec{b} = \overrightarrow{OB}$, $\vec{c} = \overrightarrow{OC}$. Tada kraštinių kvadratų suma $AB^2+BC^2+CA^2 = |\vec{a}-\vec{b}|^2+|\vec{b}-\vec{c}|^2+|\vec{c}-\vec{a}|^2 = 2(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2)-2\vec{a}\vec{b}-2\vec{b}\vec{c}-2\vec{c}\vec{a}$. Kadangi $|\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 = |\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2+2\vec{a}\vec{b}+2\vec{b}\vec{c}+2\vec{c}\vec{a}$, tai $AB^2+BC^2-CA^2 = 3(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2) - |\vec{a}+\vec{b}+\vec{c}|^2 \leqslant 3(|\vec{a}|^2+|\vec{b}|^2+|\vec{c}|^2) = 9R^2$, ir lygybė pasiekama tik kai $\vec{a}+\vec{b}+\vec{c} = \vec{0}$. Pastaroji lygybė reiškia, kad trikampis ABC yra taisyklingas. Iš tikrųjų, pažymėkime kampą tarp vektorių $\vec{a}$ ir $\vec{b}$ raide φ. Tada $\vec{a}+\vec{b} = -\vec{c}$, $(\vec{a}+\vec{b})^2 = \vec{c}^2$, $\vec{a}^2+\vec{b}^2+2\vec{a}\vec{b} = \vec{c}^2$, $\vec{a}^2+\vec{b}^2+2|\vec{a}||\vec{b}|\cos\varphi = c^2$, $R^2+R^2+2R\cdot R\cos\varphi = R^2$, $\cos\varphi = -\frac{1}{2}$, $\varphi = 120^\circ$. Lygiai taip pat įrodome, kad ir kampas tarp vektorių $\vec{b}$ ir $\vec{c}$, ir kampas tarp vektorių $\vec{c}$ ir $\vec{a}$ lygūs 120°, o tai ir reiškia, kad trikampis ABC yra lygiakraštis.

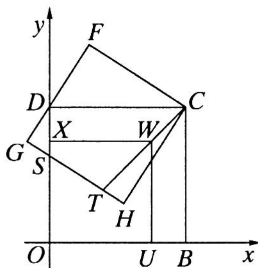
Atsakymas. Tris kraštines.

264. Žr. 258 uždavinį.

XLVI OLIMPIADA (1997 m.)

265. b) Jei kvadratą 5×5 dengia trys kvadratai $3{,}5\times 3{,}5$, tai jie taip pat dengia ir keturias jo viršūnes. Vadinasi, bent vienas kvadratas dengia dvi viršūnes, t. y. bent vienas kvadratas dengia du taškus, tarp kurių atstumas 5 arba $5\sqrt{2}$ (taigi ne mažesnis kaip 5). Gauname prieštarą, nes didžiausias atstumas tarp kvadrato $3{,}5\times 3{,}5$ taškų yra įstrižainės ilgis $3{,}5\sqrt{2}$, bet $3{,}5\sqrt{2} = \sqrt{24{,}5} < 5$.

a) Sukonstruosime pavyzdį, kaip trimis 4×4 kvadratais galima uždengti kvadratą 5×5.



Tegu pradinio kvadrato koordinatės yra $O(0;0)$ ir $C(5;5)$ (žymėsime tik 2 priešingas viršūnes). Uždėkime ant jo kvadratą 4×4 su koordinatėmis $(0;0)$, $(4;4)$. Nubrėžkime tokį statųjį trikampį CFD su įžambine CD, kad $CF = 4$, tuomet $FD = 3$ (tašką F imame kvadrato $OBCD$ išorėje). Pagaliau nubrėžkime tokį kvadratą $CFGH$ ant kraštinės FC, kad H būtų $OBCD$ viduje (žr. pav.). Tada $X(0;4)$ ir $W(4;4)$ yra keturkampio $CFGH$ viduje. Iš tiesų, tegu DX kerta GH taške S. Tuomet $DX = 1 = 4-3 = GF - DF = DG < DS$, t. y. X yra atkarpos DS taškas, ir, aišku, priklauso kvadratui $CFGH$. Kita vertus, $0^\circ < \angle WCF = \angle WCD + \angle DCF = 45^\circ + \angle DCF < 90^\circ$ (nes $\angle DCF < \angle FDC$). Tad CW kerta atkarpą GH vidaus taške T. Tuomet $CW = \sqrt{2} < 4 = CH < CT$, t. y. W yra atkarpos CT vidaus taškas, ir todėl priklauso kvadratui $CFGH$. Taigi kvadratas $CFGH$ dengia keturkampį $CDXW$. Analogiškai nubrėžę 4×4 kvadratą, dengiantį $CWUB$, gausime reikiamą konstrukciją.

266. Imkime akivaizdžią nelygybę

$$(a-b)^2+(a-c)^2+(b-c)^2 \geqslant 0.$$

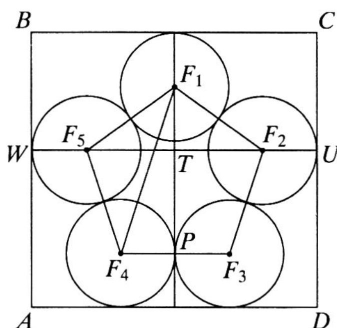
Atskliaudę ir suprastinę, turime

$$a^2+b^2+c^2 \geqslant ab+ac+bc.$$

Sakykime, kad a, b, c tenkina uždavinio sąlygas. Tuomet

$$(a+b+c)^2 = a^2+b^2+c^2+2(ab+ac+bc) \geqslant$$
$$\geqslant 3(ab+ac+bc) > 3(a+b+c) \Rightarrow$$
$$a+b+c > 3.$$

267. Sakykime, kad viskas pažymėta taip, kaip paveikslėlyje, o r — apskritimų spinduliai.



Tuomet

$$BC = WU = 2r + F_2F_5 = 2r + F_1F_4 > 2r + F_1P = AB.$$

Atsakymas. Ta, kuri liečia du apskritimus.

268. Uždavinį nesunku pradėti spręsti perrankos būdu. Žinoma, visų reikšmių neperrinksi, taigi teks įrodyti, kad „didelių" reikšmių nagrinėti nereikia. Perrinkinėkime a reikšmes.

Kai $a=1$, gaunane $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=1$. Kadangi kairė pusė didesnė už 1, tai sprendinių nėra.

Kai $a=2$, turime $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{4}{3}$. Kadangi $b>a$, tai $b \geqslant 3$. Kai $b=3$, gauname $1+\frac{1}{c}=1$, ir sprendinių nėra. Kai $b=4$, tai $\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{4}{3}$, $1+\frac{1}{c}=\frac{16}{15}$, $\frac{1}{c}=\frac{1}{15}$, $c=15$. Taigi gavome sprendinį (2; 4; 15). Kai $b=5$, tai $\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{4}{3}$, $1+\frac{1}{c}=\frac{10}{9}$, $\frac{1}{c}=\frac{1}{9}$, $c=9$, ir radome antrą sprendinį (2; 5; 9). Kai $b=6$, tai $\left(1+\frac{1}{6}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{4}{3}$, $1+\frac{1}{c}=\frac{8}{7}$, $\frac{1}{c}=\frac{1}{7}$, $c=7$, ir radome trečią sprendinį (2; 6; 7). Pagaliau, kai $b \geqslant 7$, tai $c \geqslant 8$, bet tada $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \leqslant \left(1+\frac{1}{7}\right)\left(1+\frac{1}{8}\right)=\frac{9}{7}$, ir sprendinių nėra: $\frac{9}{7}<\frac{4}{3}$, nes $9\cdot 3 < 4\cdot 7$.

Kai $a=3$, tai $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{2}$. Tada $b>a$, $b \geqslant 4$. Jei $b=4$, tai $\left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right)=\frac{3}{2}$, $1+\frac{1}{c}=\frac{6}{5}$, $\frac{1}{c}=\frac{1}{5}$, $c=5$, ir radome ketvirtą sprendinį (3; 4; 5). Pagaliau, kai $b \geqslant 5$, tai $c \geqslant 6$, todėl $\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \leqslant \left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{5}$, ir sprendinių nėra, nes $\frac{7}{5}<\frac{3}{2}$.

Kai $a \geqslant 4$, tai $b \geqslant 5$, $c \geqslant 6$, tada $\left(1+\frac{1}{a}\right)\left(1+\frac{1}{b}\right)\left(1+\frac{1}{c}\right) \leqslant \left(1+\frac{1}{4}\right)\left(1+\frac{1}{5}\right)\left(1+\frac{1}{6}\right)=\frac{7}{4}$, ir sprendinių nėra, nes $\frac{7}{4}<2$.

Atsakymas. $(a; b; c) \in \{(2; 4; 15), (2; 5; 9), (2; 6; 7), (3; 4; 5)\}$.

269. Natūralu pabandyti tiesiog spręsti lygtį

$$2^{11} \cdot m = ...1...2..., \quad \text{t. y.} \quad 2048m = ...1...2...,$$

kur dešinėje pusėje yra 11-ženklis skaičius. Aišku, kad paskutinis jo skaitmuo yra lyginis, todėl lygus 2. Tada paskutinis m skaitmuo lygus 4 arba 9, ir tenka nagrinėti dvi galimybes (kurias ir vadinsime 4 ir 9). Nagrinėkime 4. Tada $2048 \cdot ...m4 = ...2$. Jei pažymėsime $m = 10m_1 + 4$, tai kairėje pusėje gausime $8192 + 20\,480m_1$. Šio rezultato priešpaskutinis skaitmuo tegali būti 1 ir 2, bet jis nelyginis, taigi rezultato priešpaskutinis skaitmuo bus 1. Tada m_1 paskutinis skaitmuo vėl gali būti tik 4 arba 9, t. y. turėsime galimybes 44 ir 94. Matome, kad galimybių skaičius vis dvigubėja, o kadangi skaičius m gali būti net aštuonženklis, tai tektų išnagrinėti net 2^8 variantų, o be kompiuterio tai daryti beprasmiška.

Ieškokime kito būdo. Labai dažnai uždavinio sprendimą pavyksta sugalvoti išsprendus lengvesnį uždavinį (ar lengvesnius). Čia tie lengvesni uždaviniai būtų: *rasti m, kuris padaugintas iš 2^{10} duotų 10-ženklį skaičių sudarytą tik iš 1 ir 2*, ar toks: *kiekvienam j*, $1 \leqslant j \leqslant 10$, *rasti skaičių m, kuris padaugintas iš 2^j, duotų j-ženklį iš vienetų ir dvejetų.*

Pradėkime nuo $j = 1$. Aišku, kad lygybės $2^1 \cdot m = ...$ dešinėje pusėje gali būti tik skaičius 2, ir gauname $m = 1$. Kai $j = 2$, turime lygybę $2^2 \cdot m = ...$, kurios dešinės pusės paskutinis skaitmuo lyginis, taigi 2, o priešpaskutinis — nelyginis (kitaip dešinė pusė nesidalys iš 4), taigi 1. Panašiai lygybės $2^3 \cdot m = ...$ dešinėje pusėje turi stovėti 112: 12 nesidalija iš 8, 200 dalijasi iš 8, todėl pirmas skaitmuo turi būti 1. Toliau jau viskas aišku: lygybės $211 \cdot m = ...$ dešinės pusės galūnė 112 dalijasi iš 16, todėl ketvirtas nuo galo skaitmuo turi būti 2. Lygiai taip pat:

skaičius 2112 dalijasi iš 32, todėl galūnė 22 112;
skaičius 22 112 nesidalija iš 64, todėl galūnė 122 112;
skaičius 122 112 dalijasi iš 128, todėl galūnė 2 122 112;
skaičius 2 122 112 nesidalija iš 256, todėl galūnė 12 122 112;
skaičius 12 122 112 dalijasi iš 512, todėl galūnė 212 122 112;
skaičius 212 122 112 nesidalija iš 1024, todėl galūnė 1 212 122 112;
skaičius 1 212 122 112 nesidalija iš 2048, todėl galūnė 11 212 122 112.

Bet skaičius dešinėje turi būti 11-ženklis, tai jis ir yra toks. Tada

$$m = 11\,212\,122\,112 : 2048 = 5\,474\,669.$$

Atsakymas. 5 474 669.

270. Mūsų tikslas — užrašyti reiškinį $A = 97(3x^2 + 32y^2)$ kaip dviejų kvadratų su koeficientais sumą. Kadangi $97 = 1 + 3 \cdot 32$, tai $(1 + 3 \cdot 32)(3x^2 + 32y^2) = 3x^2 + 3^2 \cdot 32x^2 + 3 \cdot 32^2y^2 + 32y^2 = 3(x^2 + 32y^2) + 32(9x^2 + y^2)$. Dabar koeficientai jau sutvarkyti, bet skliaustuose yra ne sveikųjų skaičių kvadratai, ir reikia atspėti, kaip papildyti skliaustus iki sumos ir skirtumo kvadrato. Bet tai padaryti nesunku — tiesiog papildykime pirmus skliaustus „dviguba sandauga“ $2x \cdot 32y$, o tada antruose skliaustuose automatiškai atsiras $-2 \cdot 3x \cdot y$:

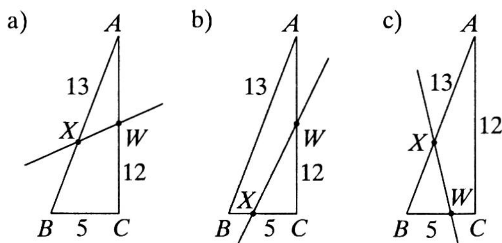
$$A = 3(x + 32y)^2 + 32(3x - y)^2.$$

Matome, kad A tikrai yra pavidalo $3u^2 + 32v^2$, kur $u, v \in \mathbf{Z}$.

271. Kiekviena tiesė, kertanti trikampį, kerta jį dviejuose taškuose, priklausančiuose skirtingoms kraštinėms, tad nagrinėkime tris atvejus.

1) Ieškomoji tiesė XW (žr. a) pav.) kerta kraštines AB ir AC (neišskiriame ir kraštinių taškų) taškuose X ir W. Pažymėkime $AX = x$, $AW = w$. Kadangi XW dalija perimetrą pusiau, tai $x+w = \frac{13+12+5}{2} = 15$. Kadangi XW dalija plotą pusiau, tai $\frac{xw \sin A}{2} = \frac{12 \cdot 13 \sin A}{4}$, todėl $xw = 78$. Bet tada $\frac{225}{4} = \frac{(x+w)^2}{4} \geqslant xw = 78$ — prieštara.

(Žinoma, buvo galima spręsti sistemą $x+w = 15$, $xw = 78$ ir įsitikinti, kad ji sprendinių neturi.)



2) Tiesė XW (žr. b) pav.) kerta kraštines BC ir AC. Vėl tegu $XC = x$, $WC = w$. Analogiškai $x+w = 15$, $xw = 30 \Rightarrow x(15-x) = 30$. Pažymėkime $f(x) = x^2 - 15x + 30$. Viena vertus, $12 + x \geqslant w + x = 15 \Rightarrow x \geqslant 3$, o kita vertus $x \leqslant 5$. Kadangi $f(x)$ yra parabolė su šakomis į viršų, $f(3) < 0$, $f(5) < 0$, tai $f(x)$ intervale $x \in [3; 5]$ šaknų neturi, t. y. reikiamų tiesių nėra.

(Vėl buvo galima spręsti sistemą $x+w = 15$, $xw = 30$, bet abu jos sprendiniai netinka: vieno sprendinio $x > 5$, kito $w > 12$.)

3) Tiesė XW (žr. c) pav.) kerta kraštines AB ir CB. Tegu $XB = x$, $WB = w$. Tada $x + w = 15$, $xw = 32{,}5 \Rightarrow w(15 - w) = 32{,}5$. Pažymėkime $g(w) = w^2 - 15w + 32{,}5$. Panašiai kaip ir anksčiau nustatome, kad $5 \geqslant w \geqslant 2$.

Kadangi $g(5) < 0$, $g(2) > 0$, tai intervale $w \in [2; 5]$ yra vienintelė šaknis, atitinkanti vienintelę tiesę XW, dalijančią ir plotą, ir perimetrą pusiau.

(Išsprendę sistemą, gautume, kad $x = \frac{15+\sqrt{95}}{2}$, $w = \frac{15-\sqrt{95}}{2}$.)

Atsakymas. Vienintelė tiesė, kertanti įžambinę ir trumpesnį statinį.

272. *Pirmas būdas.* Tegu $f(a) = f(b)$. Tada $f(x_0 - b + a) = f(x_0 - b)f(a) = f(x_0 - b)f(b) = f(x_0)$. Iš čia ir iš 2) sąlygos $x_0 - b + a = x_0 \Rightarrow a = b$.

Nesunku nurodyti ir uždavinio sąlygas tenkinančios funkcijos pavyzdį: $f(x) = 2^{x/(2x_0)}$.

Antras būdas. Kadangi $f(x_0) = f(x_0 + 0) = f(x_0)f(0)$ ir $f(x_0) \neq 0$, tai $f(0) = 1$. Tada $1 = f(0) = f(x - x) = f(x) \cdot f(-x) \Rightarrow f(x) \neq 0$, $\forall x \in \boldsymbol{R}$, ir $f(-x) = \frac{1}{f(x)}$. Tegu a ir b tokie, kad $f(a) = f(b)$. Tuomet $f(a - b) = f(a)f(-b) = \frac{f(a)}{f(b)} = 1$, todėl

$$f(x_0) = 1 \cdot f(x_0) = f(a - b)f(x_0) = f(a - b + x_0) \Rightarrow x_0 = a - b + x_0 \Rightarrow a = b.$$

273. Lygties

$$x^2 - 4 = \sqrt{x + 4} \qquad (1)$$

apibrėžimo sritis yra $x \geqslant -4$. Aišku, kad ji gali turėti sprendinių tik kai $|x| \geqslant 2$. Vadinasi, užtenka nagrinėti sritį $x \in [-4; -2] \cup [2; +\infty)$.

Perrašykime (1) lygtį taip:

$$(x^2-4)^2-4=x. \tag{2}$$

Pastebėkime, kad visi lygties $f(x)=x$ sprendiniai yra ir lygties $f(f(x))=x$ sprendiniai (f — bet kokia funkcija $\boldsymbol{R}\to\boldsymbol{R}$). Iš tikrųjų, jei $f(x_0)=x_0$, tai $f(f(x_0))=f(x_0)=x_0$. Pritaikę teiginį funkcijai $f(x)=x^2-4$, gauname: lygties $x^2-4=x$ sprendiniai tenkina (2) lygtį.

Daugianarių kalba tai reiškia, kad daugianaris $x^4-8x^2-x+12=(x^2-4)^2-4-x$ dalijasi iš daugianario x^2-x-4 be liekanos. Dalydami kampu, gauname

$$x^4-8x^2-x+12=(x^2-x-4)(x^2+x-3).$$

Taigi jei x tenkina (2) lygtį, tai arba $x^2-x-4=0$, arba $x^2+x-3=0$. Iš šių lygčių sprendinių $x_1=\frac{1+\sqrt{17}}{2}$, $x_2=\frac{1-\sqrt{17}}{2}$, $x_3=\frac{-1+\sqrt{13}}{2}$, $x_4=\frac{-1-\sqrt{13}}{2}$ į nagrinėjamą sritį patenka tik x_1 ir x_4. Visi pertvarkymai toje srityje ekvivalentūs, todėl tikrinimas nereikalingas.

Atsakymas. $\left\{\frac{1+\sqrt{17}}{2}, \frac{-1-\sqrt{13}}{2}\right\}$.

274. *Pirmas būdas.* Tegu $\sqrt[4]{2}=a$. Tuomet

$$\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}=\frac{1}{a+a^2+a^3+a^4}=\frac{1}{\frac{a(a^4-1)}{a-1}}=$$

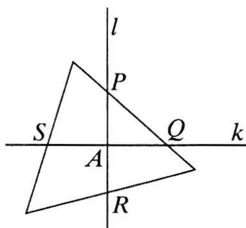
$$=\frac{a-1}{a(a^4-1)}=\frac{a^4-a^3}{a^4(a^4-1)}=\frac{2-\sqrt[4]{8}}{2}.$$

Antras būdas.

$$\frac{1}{a+a^2+a^3+a^4}=\frac{1}{a(a+1)(a^2+1)}=\frac{a^3(a-1)}{a^4(a^2-1)(a^2+1)}=\frac{a^4-a^3}{a^4(a^4-1)}=\frac{2-\sqrt[4]{8}}{2}.$$

Atsakymas. $\frac{1}{\sqrt[4]{2}+\sqrt[4]{4}+\sqrt[4]{8}+2}=\frac{2-\sqrt[4]{8}}{2}$.

275. Imkime bet kurį tašką A to trikampio viduje (žr. pav.).



Įrodysime, kad A priklauso bent vienam iš stačiakampių. Tiesė l, lygiagreti vienoms stačiakampių kraštinėms, ir tiesė k, lygiagreti kitoms, kerta trikampio kraštines keturiuose taškuose: P ir R bei Q ir S. Šiuos taškus dengia 3 stačiakampiai, todėl nors vienas jų dengia 2 taškus. Jei tai tos pačios tiesės (l arba k) taškai, tai ir juos jungianti atkarpa, taigi ir taškas A, priklauso tam stačiakampiui.

Sakykime, kad taškai yra skirtingų tiesių, pavyzdžiui, P ir Q. Tada visas statusis trikampis PAQ, kurio statiniai lygiagretūs stačiakampio kraštinėms, o įžambinės galai — tie du taškai taip pat priklauso dengiančiajam stačiakampiui. Iš tikrųjų, to dengiančiojo trikampio „dešinioji" kraštinė eina per Q arba dešiniau, kairioji — per P arba kairiau, viršutinė — per P arba aukščiau, apatinė — per Q arba žemiau, todėl apima trikampį PAQ.

Pastaba. Sąlyga, kad duotoji figūra yra trikampis — neesminė. Užtenka pareikalauti, kad ta figūra būtų iškila.

276. Suskaičiuokime, kiek yra *porų tiesių*, kurios kertasi. Skaičių taškų, kuriuose kertasi lygiai i tiesių ($i = 2, 3, \ldots, d$), pažymėkime a_i. Kiekvieną tašką, kuriame kertasi $i \geqslant 2$ tiesių, atitinka lygiai C_i^2 porų tarpusavyje besikertančių tame taške tiesių. Todėl ieškomas porų skaičius yra

$$L = C_2^2 a_2 + C_3^2 a_3 + \cdots + C_d^2 a_d.$$

Kita vertus, kiekvienos dvi tiesės kertasi ne daugiau kaip viename taške, t. y. $L \leqslant C_d^2$. Taigi,

$$C_j^2 a_j \leqslant \sum_{i=2}^{d} C_i^2 a_i \leqslant C_d^2, \quad j = 2, 3, \ldots, d.$$

Vadinasi,

$$a_j \leqslant \frac{C_d^2}{C_j^2} = \frac{d(d-1)}{j(j-1)}.$$

Dabar užtenka įstatyti $j = 3$.

277. Galime laikyti, kad a_1 — mažiausias iš skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_{40}$. Pagal sąlygą $a_1 a_i \geqslant \text{MBK}(a_1, a_i) > 1997$, $i = 2, 3, \ldots, 40$, taigi $a_i > \frac{1997}{a_1}$, $i = 2, 3, \ldots, 40$. Aišku, kad $a_1 \neq 1$, nes kitaip $\text{MBK}(a_1, a_2) = a_2 \leqslant 1997$, todėl $a_1 \geqslant 2$. Jei $a_1 > 40$, tai $a_i > 40$, $i = 2, 3, \ldots, 40$. Šiuo atveju

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{40}} < 40 \cdot \frac{1}{40} = 1.$$

Todėl laikykime, kad $a_1 \leqslant 40$. Kadangi $\frac{1}{a_i} < \frac{a_1}{1997}$, tai

$$\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \cdots + \frac{1}{a_{40}} < \frac{1}{a_1} + \frac{37a_1}{1997} = \frac{1}{a_1} + \frac{39a_1}{1997} - \frac{1}{40} - \frac{39 \cdot 40}{1997} + \frac{1}{40} + \frac{39 \cdot 40}{1997} =$$
$$= (40 - a_1)\left(\frac{1}{40a_1} - \frac{39}{1997}\right) + \frac{1}{40} + \frac{39 \cdot 40}{1997} < 1,$$

nes $40 - a_1 \geqslant 0$, $\frac{1}{40a_1} - \frac{39}{1997} \leqslant \frac{1}{40 \cdot 2} - \frac{39}{1997} < 0$, o $\frac{1}{40} + \frac{39 \cdot 40}{1997} < 1$.

278. *Pirmas būdas.* Nagrinėkime tris atvejus.

1) $y + z = 1$. Tuomet $L = x(1 - y - z) + y + z - yz = 1 - yz$ (reiškinio reikšmė nuo x nepriklauso). Kadangi $0 \leqslant yz \leqslant \frac{(y+z)^2}{4} = \frac{1}{4}$, tai $\frac{3}{4} \leqslant L \leqslant 1$, ir maksimumas pasiekiamas, kai $(x, y, z) = (c, 1, 0), (c, 0, 1), 0 \leqslant c \leqslant 1$; minimumas — kai $(x, y, z) = \left(c, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$.

2) $y+z<1$. Tuomet $L=x(1-y-z)+y+z-yz$. Reiškinys pasieks maksimumą, kai $x=1$ (nes dauginamasis prie x teigiamas). Šiuo atveju $L=1-yz\leqslant 1$ ir lygybė pasiekiama, kai nors vienas dauginamasis lygus 0, t. y. su trejetais $(x,y,z)=(1,c,0)$, $(1,0,c)$. Reiškinys pasieks minimumą, jei $x=0$, t. y. $L=y+z-yz=y(1-z)+z\geqslant 0$. Minimali reikšmė pasiekiama, kai $z=0$ ir $y=0$, t. y. su trejetu $(x,y,z)=(0,0,0)$.

3) $y+z>1$. Tuomet $L=x(1-y-z)+y+z-yz$. Reiškinys pasieks maksimumą, kai $x=0$, t. y. kai $L=y+z-yz=y(1-z)+z$. Jei $z=1$, tai $L=1$ (nuo y nepriklauso). Reikšmė pasiekiama su trejetais $(x,y,z)=(0,c,1)$. Jei $z<1$, maksimumas pasiekiamas, kai $y=1$ (nuo z nepriklauso), t. y. $(x,y,z)=(0,1,c)$. Reiškinys pasieks minimumą, kai $x=1$, t. y. $L=1-yz\geqslant 0$. Minimumas pasiekiamas, kai $yz=1$, t. y. su trejetu $(x,y,z)=(1,1,1)$.

Antras būdas. Pažymėkime $L=x+y+z-xy-xz-yz$. Tuomet

$$1-L=(1-x)(1-y)(1-z)+xyz\geqslant 0.$$

$1-L$ pasiekia minimumą 0 (t. y. L pasiekia maksimumą 1), kai $(1-x)(1-y)(1-z)+xyz=0\Rightarrow(1-x)(1-y)(1-z)=0$, $xyz=0$, t. y. kai nors vienas kintamasis lygus 1 ir nors vienas lygus 0, t. y. trejetais $(1,0,c)$ ir visomis jo perstatomis. Kita vertus,

$$L=x(1-y)+y(1-z)+z(1-x)\geqslant 0,$$

ir minimumas pasiekiamas, kai $x(1-y)=0$, $y(1-z)=0$, $z(1-x)=0$, t. y. $(x,y,z)=(0,0,0)$ arba $(1,1,1)$.

Atsakymas. Maksimali reikšmė 1 pasiekiama su trejetais $(c,1,0)$ ir visomis jų perstatomis. Minimali reikšmė 0 pasiekiama su trejetais $(1,1,1)$ ir $(0,0,0)$.

279. Sakykime, kad plokštumoje duota $2g$ taškų, kurių jokie trys nėra vienoje tiesėje.

Lema. *Per kiekvieną tašką eina bent viena mediana.*

Įrodymas. Pasirinkime tašką A ir per jį ir likusius $2g-1$ tašką išveskime $2g-1$ tiesę. Tokiu būdu gavome $4g-2$ spindulius, išeinančius iš taško A. Kiekvienam spinduliui AB priskirkime skaičių, lygų taškų, esančių tiesės AB kairėje ir dešinėje spindulio AB atžvilgiu, skaičiaus skirtumui. Kadangi tiesė AB eina per du taškus, tai šis skaičius lyginis. Be to, tos pačios tiesės skirtingų krypčių spinduliams priskirti skaičiai x ir $-x$. Kaimyniniais vadinkime du spindulius, einančius per tašką A, kurių sudaromo kampo viduje ir jam kryžminio kampo viduje nėra nė vieno taško (atitinkamai kituose dviejuose kryžminiuose kampuose yra $2g-3$ taškai, o kiekvienoje iš spindulius atitinkančių *tiesių*, be taško A, dar po vieną tašką). Kaimyninių spindulių skaičiai skiriasi 0 arba ± 2. Iš tikrųjų, imkime du kaimyninius spindulius ir nagrinėkime atitinkamas tieses AM ir AN. Taškas A nė vienam iš spindulių nėra nei kairysis, nei dešinysis. Taškas M tiesės AM spinduliui (ir N — tiesės AN spinduliui) taip pat nėra nei kairysis, nei dešinysis. Bet kuris iš likusių $2g-3$ taškų abiejų spindulių atžvilgiu turi tą pačią „orientaciją“ — yra arba kairysis, arbe dešinysis. Todėl kaimyninių spindulių skaičių skirtumas priklauso tik nuo taškų M ir N: jei M ir N „orientacija“ vienoda, tai skaičiai lygūs, o jei M ir N orientacija skiriasi, tai skaičiai skiriasi ± 2. Jei x — bet kurio spindulio skaičius, tai yra spindulys su skaičiumi $-x$. Taigi judant, pavyzdžiui, pagal laikrodžio rodyklę apie tašką A iš skaičiaus $-x$ galima gauti skaičių x vis pridedant 0, ± 2, todėl visi lyginiai skaičiai tarp $-x$ ir x

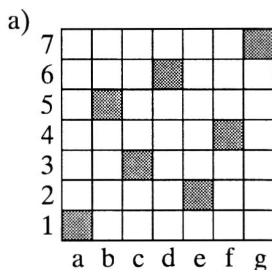
yra tarpinės reikšmės. Taigi ir 0 yra tarpinė reikšmė. Tai reiškia, kad egzistuoja spindulys AC su priskirtu skaičiumi 0. Vadinasi, tiesė AC yra mediana. Lema įrodyta.

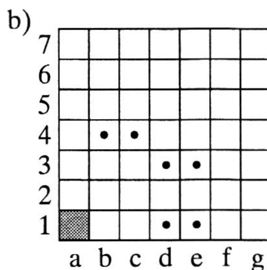
Išveskime per kiekvieną iš 100 taškų po medianą. Kadangi trijų sutampančių medianų nebus, gausime bent 50 skirtingų medianų.

Lygybė pasiekiama iškilojo 100-kampio atveju.

XLVII OLIMPIADA (1998 m.)

280. (Plg. [1], 928 uždavinį). a) Turime kvadratą 7×7, ir klausiama, ar atsitiktinai nudažius juodai 7 langelius iš jo visada bus galima iškirpti baltą stačiakampį, kurio plotas $S \geqslant 7$. Užtenka išsiaiškinti, ar visada galima iškirpti bent vieną iš stačiakampių 1×7, 2×4 ir 3×3. Iš tikrųjų, jei iškirpto stačiakampio plotas $\geqslant 7$, tai bent viena jo kraštinė $\geqslant 3$. Jei didesnioji (= nemažesnioji) kraštinė lygi 3, tai kita irgi lygi 3, ir turime kvadratą 3×3. Jei didesnioji kraštinė lygi 4, 5 ar 6, tai kita $\geqslant 2$, ir iš to stačiakampio bus galima iškirpti stačiakampį 4×2. Jei didesnioji kraštinė lygi 7, tai kita $\geqslant 1$, ir iš stačiakampio bus galima iškirpti stačiakampį 7×1.





Išspręsti a) punktui užtenka pateikti a) paveikslą. Nesunku įsitikinti, kad iš taip nudažyto kvadrato neįmanoma iškirpti reikalaujamo stačiakampio. Mes įrodysime šiek tiek daugiau — kad, neskaitant apvertimų ir pasukimų, ši konfigūracija yra vienintelė — kitaip uždažius, reikiamą stačiakampį iškirpti bus galima.

Sakykime, kad mums pavyko taip uždažyti 7 langelius, jog norimo stačiakampio iškirpti negalima. Tada kiekvienoje eilutėje (ir kiekviename stulpelyje) yra uždažytas bent vienas langelis — kitaip būtų galima iškirpti stačiakampį 1×7. Be to, jeigu kurioje nors eilutėje būtų uždažyti $\geqslant 2$ langeliai, tai kitoms 6 eilutėms liktų tik 5 langeliai, ir bent vienoje eilutėje uždažyto langelio nebūtų. Taigi kiekvienoje eilutėje ir kiekviename stulpelyje yra lygiai vienas uždažytas langelis (šiuo faktu remsimės nuolat, taip pat ir punkte b)).

Nagrinėkime 2 atvejus: 1) kuriame nors kvadrato krašte yra uždažytas bent vienas nekampinis langelis; 2) kvadrato kraštuose uždažyti tik kampiniai langeliai.

1) atveju sukiojant ir vartant kvadratą galima pasiekti, kad tai būtų langelis a2, a3 arba a4 (žymime kaip šachmatuose — stulpelius raidėmis a, b, c, d, e, f, g, eilutes skaitmenimis 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7). Kad būtų paprasčiau užrašyti samprotavimą, sakykime, kad tai langelis a2 (iš tikrųjų mums svarbu tik tai, kad virš langelio yra bent 3 eilutės). Kadangi kiekviename iš 2×4 stačiakampių (žr. b) pav.) b1-b2-e2-e1 ir d1-d2-g2-g1 (juos žymime nurodydami kampinius langelius) turi būti bendras 1 eilutės uždažytas langelis, tai jis gali būti tik d1 arba e1. Pastūmę tuos stačiakampius per 1 langelį į viršų, įsitikiname, kad trečios eilutės uždažytas langelis gali būti tik d3 arba e3. Bet 2×4 stačiakampyje b1-b4-c4-c1 turi

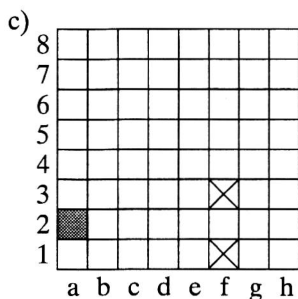
būti uždažytas langelis, o jo pirmos trys eilutės „užimtos“. Taigi uždažytas arba b4, arba c4. Bet tada 2×4 stačiakampis f1-fg4-g4-g1 lieka neuždažytas. Taigi 1) atveju iškirpti stačiakampį galima visada.

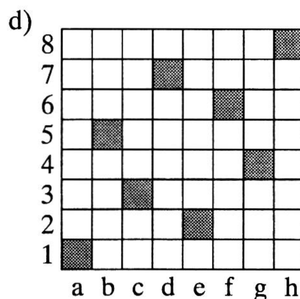
2) atveju sukiodami pasiekiame, kad uždažytas būtų langelis a1. Kadangi stulpelyje g pirma eilutė užimta, o nekampinių uždažytų langelių nėra, tai uždažytas langelis g7 (pasidarykite brėžinį). Kadangi stačiakampiuose b1-b2-e2-e1 ir d1-d2-g2-g1 antrõs eilutės uždažytas langelis bendras, tai jis yra vienas iš langelių d2 ir e2. Galime laikyti, jog tai langelis e2 (jeigu uždažytas d2, tai iš langelių c6 ir d6 — vienas iš jų turi būti uždažytas pagal analogiją — gali būti uždažytas tik c6, o tada, pasukus kvadratą apie centrą 180° kampu, langelis c6 pereis į e2). Analogiškai turi būti uždažytas vienas iš langelių f3 ir f4. Bet jei būtų uždažytas f3, tai 2×4 stačiakampyje e4-e7-f7-f4 nebūtų uždažytų langelių. Vadinasi, uždažytas langelis f4. Vėl analogiškai turi būti uždažytas vienas iš langelių b4 ir b5, bet 4 eilutė jau užimta, taigi uždažytas langelis b5. Pagaliau iš langelių poros c6 ir d6 negali būti uždažytas c6, nes tada 2×4 stačiakampyje b1-b4-c4-c1 nebūtų uždažytų langelių. Vadinasi, uždažytas langelis d6. Liko laisvas tik stulpelis c, o jame — tik langelis c3. Gavome a) pav. konfigūraciją.

Beje, sprendimas tiktų ir tada, jeigu apie kvadratą 3×3 nekalbėtume.

b) Dabar turime kvadratą 8×8, ir užtenka nustatyti, ar galima iškirpti bent vieną iš stačiakampių 1×8, 2×4 ir 3×3. Įrodysime, kad tai įmanoma visada. Vėl nagrinėkime 2 atvejus.

1) atveju, kai yra kraštinis nekampinis langelis, galime laikyti, kad tai langelis a2, a3 arba a4. Įrodymas tas pats visais atvejais, tad laikykime, kad uždažytas langelis a2 (žr. c) pav.). Kadangi 2×4 stačiakampiai b1-b2-e2-e1 ir e1-e2-h2-h1 turi turėti bendrą 1 eilutės langelį, tai tas langelis yra e1. Pastūmę stačiakampius per vienetą į viršų, įsitikiname, kad turi būti uždažytas ir langelis e3. Bet tada stulpelyje e bus uždažyti 2 langeliai — prieštara.





2) atveju, kai nėra uždažytų kraštinių nekampinių langelių, galime laikyti, kad uždažyti langeliai a1 ir h8 (žr. d) pav.). Nagrinėdami jau minėtus stačiakampius, įsitikiname, kad turi būti uždažytas e2, o iš simetrijos — ir b5, d7, g4. Nagrinėdami 2×4 stačiakampius b1-b4-c4-c1 ir c1-c4-d4-d1, matome, kad jie turi turėti bendrą uždažytą langelį c3. Analogiškai turi būti uždažytas ir f6. Taigi uždažėme jau 8 langelius, bet liko baltas, pavyzdžiui, 2×4 stačiakampis c4-c5-f5-f4.

Beje, ir punkte b) galima nekalbėti apie kvadratus 3×3.

Atsakymas. a) Ne, nevisada. b) Taip, visada.

281. Tegu $a_1, a_2, \ldots, a_s$, — rinkinio skaičiai ($s = 1998$), M — jų suma. Skaičių rinkinys $M - a_1$, $M - a_2, \ldots, M - a_s$ — duotasis, galbūt išdėstytas kita tvarka. Visų skaičių suma abiem atvejais ta pati, $M = sM - M \Rightarrow M = 0$ (nes $s \neq 2$). Taigi naująjį rinkinį sudaro skaičiai $-a_1, -a_2, \ldots, -a_s$. Įrodysime, kad rinkinyje nėra 0. Iš tiesų, bet koks nelygus 0 rinkinio skaičius šiame rinkinyje turi savo porą — priešingo ženklo skaičių, kuris jam nelygus (nes iš $a = -a$ išplaukia $a = 0$), ir jeigu rinkinyje būtų 0, tai jame būtų *nelyginis* skaičių skaičius. Taigi rinkinyje 0 nėra, ir visi skaičiai yra poros $(a, -a), \ldots, (z, -z)$, kurių yra $\frac{s}{2} = 999$, t. y. nelyginis skaičius. Kiekvienos poros skaičių sandauga yra neigiama, todėl visų rinkinio skaičių sandaugos ženklas sutampa su $(-1)^{s/2} = -1$.

Atsakymas. a) Pavyzdžiui $\{1, -1, 2, -2, \ldots, 999, -999\}$.

282. Pažymėkime ieškomąjį skaičių $\overline{a_0a_1a_2...a_9}$. Pagal sąlygą a_i — kiekis i-etų tarp dešimties skaitmenų. Kadangi tarp 10 skaičių $a_0, a_1, \ldots, a_9$ yra a_0 nulių, tai tarp jų yra $10 - a_0$ nenulių. Aišku, kad $a_0 \neq 0$ (priešingu atveju, jei $a_0 = 0$, tai nulių yra, ir turėtų būti $a_0 \geqslant 1$, — prieštara). Todėl tarp skaičių $a_1, a_2, \ldots, a_9$ yra lygiai $9 - a_0$ nenulių.

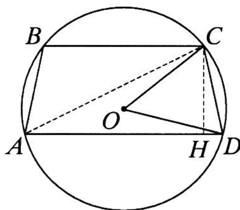
Kokia šių skaičių suma? Viena vertus, ji lygi $a_1 + a_2 + \cdots + a_9$. Kita vertus, šis skaičius pagal prasmę lygus nenulinių skaitmenų kiekiui tarp $a_0, a_1, \ldots, a_9$, t. y. lygus $10 - a_0$. Vadinasi, $9 - a_0$ nenulinių skaitmenų suma lygi $10 - a_0$, todėl vienas jų lygus 2, kiti $8 - a$ lygūs 1. Taigi, tarp šių 10 skaitmenų bus ne daugiau kaip 4 skirtingi, t. y. ne mažiau kaip 6 skaitmenų iš viso nebus. Atitinkamose vietose stovės 0, todėl $a_0 \geqslant 6$.

Taigi yra a_0 nulių, $8 - a_0$ vienetų, vienas dvejetas, vienas a_0-etas. Dvejetas mums sako, kad kažkoks skaitmuo pasikartos lygiai 2 kartus. Kadangi $a_0 \geqslant 6$, tai $8 - a_0 = 2$, ir $a_0 = 6$. Taigi gauname skaičių, kurio $a_0 = 6$ (vadinasi, jame yra 6 nuliai), $a_1 = 8 - 6 = 2$ (yra 2 vienetai), $a_2 = 1$, $a_6 = 1$, t. y. skaičių 6 210 001 000.

Atsakymas. 6 210 001 000.

283. Kadangi $ABCD$ trapecija (žr. pav.), tai $\angle A + \angle B = 180°$. Kita vertus, ji — įbrėžtinis keturkampis, tad $\angle B + \angle D = 180°$. Iš šių lygybių išplaukia, kad $\angle A = \angle D$, t. y. turime lygiašonę trapeciją. Todėl $\frac{BC+AD}{2} = AH$, kur H — aukštinės, nuleistos iš viršūnės C į AD, pagrindas. Kita vertus, $\angle CAD = \frac{\angle COD}{2} = 30°$, todėl $AH = h \operatorname{ctg} 30° = h\sqrt{3}$. Vadinasi, $S = \frac{h(BC+AD)}{2} = h^2\sqrt{3}$.

Beje, nesunku įsitikinti, kad sprendimas nepriklauso nuo to, kokią padėtį trapecija užima apskritimo centro atžvilgiu.



Atsakymas. $h^2\sqrt{3}$.

284. Žr. 280 uždavinį.

285. Pažymėkime
$$\frac{a}{b} = p, \quad \frac{b}{c} = q. \tag{1}$$
Tada iš sąlygos $\frac{d}{c} = p$, $\frac{a}{d} = q$, ir pradinė lygybė įgauna pavidalą
$$p + q + \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 4, \tag{$*$}$$
o reiškinys $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}$ tampa lygus $pq + \frac{q}{p} + \frac{1}{pq} + \frac{p}{q} = \left(p + \frac{1}{p}\right)\left(q + \frac{1}{q}\right)$.

Sąlyga, kad a, b, c, d — skirtingi, ekvivalenti sąlygoms
$$p \neq 1, \quad q \neq 1, \quad pq \neq 1. \tag{2}$$
Bet $p + \frac{1}{p} \geqslant 2$, kai $p > 0$, ir $p + \frac{1}{p} \leqslant -2$, kai $p < 0$. Todėl atveju, kai $p, q > 0$, iš ($*$) gautume $p + \frac{1}{p} = 2$, $q + \frac{1}{q} = 2 \Rightarrow p = q = 1$ — prieštara. Taigi nors vienas iš p ir q (ir, akivaizdu, tik vienas, sakykime, p) neigiamas: $p + \frac{1}{p} \leqslant -2$. Iš ($*$) išplaukia, kad $q + \frac{1}{q} \geqslant 6$, todėl $\left(p + \frac{1}{p}\right)\left(q + \frac{1}{q}\right) \leqslant -12$. Lygybė pasiekiama, kai, pavyzdžiui, $p = -1$, $q + \frac{1}{q} = 6$, t. y. $p = -1$, $q_{1,2} = 3 \pm \sqrt{8}$. Vadinasi, reiškinys $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b}$ esant išpildytoms uždavinio sąlygoms visada ne didesnis už -12, o reikšmė -12 pasiekiama, pavyzdžiui, imant $b = 1$, $a = pb = -1$, $c = \frac{b}{q_1} = \frac{1}{3+\sqrt{8}} = 3 - \sqrt{8}$, $d = \frac{ac}{b} = \sqrt{8} - 3$.

Atsakymas. Mažiausia reiškinio $\frac{a}{c} + \frac{b}{d} + \frac{c}{a} + \frac{d}{b} = 4$ reikšmė yra -12; ji pasiekiama, pavyzdžiui, kai $a = -1$, $b = 1$, $c = 3 - \sqrt{8}$, $d = -3$.

286. Sakykime, kad $\frac{2^{p-1}-1}{p} = x^2$. Reikšmė $p = 2$ lygties netenkina. Jeigu $p > 2$, t. y. p — pirminis nelyginis skaičius, tai $p = 2s + 1$. Tada $2^{2s} - 1 = px^2 \Rightarrow (2^s - 1)(2^s + 1) = px^2$. Kadangi p — pirminis skaičius, tai arba vienas, arba kitas kairės pusės daugiklis dalijasi iš p. Išnagrinėkime abu atvejus.

1) $2^s - 1$ dalijasi p. Kadangi $2^s - 1$ ir $2^s + 1$ tarpusavyje pirminiai (jei jie turėtų bendrą daliklį d, tai ir jų skirtumas, lygus 2, dalytųsi iš d, tada d būtų lygus 2, bet $2^s + 1$ iš 2 nesidalija), tai $\frac{2^s-1}{p}$ ir $2^s + 1$ taip pat būtų tarpusavyje pirminiai. Jų sandauga — kvadratas, tad kiekvienas iš jų — natūraliojo skaičiaus kvadratas. Todėl
$$2^s + 1 = y^2, \quad 2^s = (y - 1)(y + 1).$$
Kiekvienas iš dauginamųjų — dvejeto laipsnis: $y - 1 = 2^a$, $y + 1 = 2^b \Rightarrow 2^b - 2^a = 2 \Rightarrow a = 1$ (jei $a > 1$, tai kairė pusė dalijasi iš 4) $\Rightarrow y = 3$. Taigi $2^s = 8 \Rightarrow s = 3 \Rightarrow p = 7$. Patikrinę įsitikiname, kad $p = 7$ tinka, nes $\frac{2^6-1}{7} = 9$ yra kvadratas.

2) $2^s + 1$ dalijasi iš p. Tada $2^s - 1 = y^2 \Rightarrow 2^s = y^2 + 1$. Kadangi y — nelyginis, tai $y = 2k + 1 \Rightarrow 2^s = 4k^2 + 4k + 2 \Rightarrow s = 1$ (jei $s > 1$, tai kairė pusė dalytųsi iš 4, o dešinė nesidalija) $\Rightarrow p = 3$. Patikrinę matome, kad $p = 3$ taip pat tinka: $\frac{2^2-1}{3} = 1$ yra kvadratas.

Atsakymas. $p = 3$ ir $p = 7$.

287. Žr. 281 uždavinį.

288. Žr. 280 uždavinį.

289. Žr. 285 uždavinį.

290. Iš 1) sąlygos, imdami $y = x$, gauname

$$f(x^2) = 2f(x) - 1. \tag{1}$$

Todėl $f(1) = 2f(1) - 1$, t. y. $f(1) = 1$. Jei su kokiu nors $x \neq 1$ $f(x) = 1$, tai ir $f(x^2) = 2 \cdot f(x) - 1 = 2 \cdot 1 - 1 = 1$. Lygiai taip pat $f(x^4) = 1$, $f(x^8) = 1$ ir t. t., ir gauname be galo daug reikšmių, su kuriomis $f(x) = 1$. Tai prieštarauja 2) sąlygai. Todėl

$$f(x) \geqslant 2, \quad \text{kai } x \geqslant 2. \tag{2}$$

Remiantis 3) sąlyga, $4 = f(30) = f(5) + f(6) - 1 = f(5) + f(2) + f(3) - 2$, t. y.

$$f(2) + f(3) + f(5) = 6. \tag{3}$$

Kadangi remiantis (2) nelygybe kiekvienas kairės pusės dėmuo ne mažesnis už 2, tai $f(2) = f(3) = f(5) = 2$.

Dabar jau nesunku apskaičiuoti $f(14\,400)$:

$$\begin{aligned} f(14\,400) &= f(120^2) = 2f(120) - 1 = 2\big(f(30) + f(4) - 1\big) - 1 = \\ &= 2\big(f(4) + 3\big) - 1 = 2\big(2f(2) - 1 + 3\big) - 1 = 4f(2) + 3 = 4 \cdot 2 + 3 = 11. \end{aligned}$$

Pastabos. 1) Jau matėme, kad 2) sąlyga apsprendžia atsakymo vienareikšmiškumą. Pasižiūrėkime, kas būtų jos atsisakius. Kadangi $f(14\,400) = 4f(2) + 3$, tai viskas priklauso nuo reikšmės $f(2)$. Iš (3) lygybės aišku, kad $f(2)$ gali įgyti reikšmes 1, 2, 3, 4. Atitinkamai $f(14\,400)$ įgytų reikšmes 7, 11, 15, 19.

2) Žinoma, norėtųsi įsitikinti, kad tikrai yra tokių funkcijų $f(x)$, kurios tenkina visas tris uždavinio sąlygas. Iš tikrųjų — gal iš viso nė vienos tokios funkcijos nėra, o tada ir gauto atsakymo vertė būtų abejotina.

Jau įsitikinome, kad turi būti $f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = f(5) = 2$. Todėl natūralu ieškoti funkcijos, kuri įgyja reikšmes $f(p) = 2$ visiems pirminiams p (jau matėme, kad reikšmės $f(p) = 1$ jokiam p imti negalima — kitaip būtų pažeista uždavinio 2) sąlyga). Tada remiantis 1) sąlyga $f(x)$ bus vienareikšmiškai apibrėžta visiems $x \in \boldsymbol{N}$. Iš tikrųjų, iš pradžių apibrėžkime $f(x)$, kai x turi 2 pirminius daugiklius, $x = p_1 p_2$ (daugikliai gali būti ir lygūs); pagal 1) sąlygą

$$f(x) = f(p_1 p_2) = f(p_i) + f(p_2) - 1,$$

ir reikšmė $f(x)$ apibrėžta. Tada apibrėžkime $f(x)$, kai x turi tris pirminius daugiklius, $x = p_1 p_2 p_3$; vėl pagal 1) sąlygą

$$f(x) = f(p_1 p_2 p_3) = f(p_1 p_2) + f(p_3) - 1,$$

ir $f(x)$ apibrėžta. Taip tęsdami gausime funkciją $f(x)$, apibrėžtą visiems x.

O dabar pasižiūrėkime, kaip paprasčiau apibūdinti mūsų funkciją. Kai $x = p_1p_2$, gauname

$$f(x) = f(p_1) + f(p_2) - 1 = 2 + 2 - 1 = 3;$$

kai $x = p_1p_2p_3$, tai

$$f(x) = f(p_1p_2) + f(p_3) - 1 = 3 + 2 - 1 = 4.$$

Tęsdami toliau, gauname, kad jei x turi n pirminių daugiklių, $x = p_1p_2...p_n$, tai $f(x) = n+1$. Taigi žodžiais galima pasakyti, kad mūsų pateikta funkcija $f(x)$ išreiškia natūraliojo skaičiaus x pirminių daugiklių skaičių, padidintą vienetu (beje, tai tinka ir skaičiui 1, ir pirminiam skaičiui p).

Visiškai aišku, kad mūsų funkcija

$$f(x) = n + 1, \quad \text{jei} \quad x = p_1p_2...p_n, \tag{4}$$

tenkina 2) ir 3) sąlygas. Liko patikrinti, ar ji tenkina 1) sąlygą (prisiminkime, kad anksčiau apie 1) sąlygą kalbėjome tik kai x arba y pirminis). Bet jei

$$x = p_1p_2...p_n, \quad y = q_1q_2...q_m,$$

tai

$$xy = p_1p_2...p_nq_1q_2...q_m,$$

$$f(x) = n + 1, \quad f(y) = m + 1, \quad f(xy) = n + m + 1,$$

ir 1) sąlyga tampa akivaizdžia lygybe:

$$n + m + 1 = (n + 1) + (m + 1) - 1.$$

3) Nurodysime visas funkcijas, kurios tenkina 1)–3) sąlygas. Matėme, kad $f(1) = 1$, $f(2) = f(3) = f(5) = 2$. Apibrėžkime $f(x)$ reikšmes kitiems pirminiams skaičiams bet kaip:

$$f(7) = k_7, \quad f(11) = k_{11}, \quad f(13) = k_{13}, \quad \ldots$$

(čia k_7, k_{11}, k_{13} ir t. t. — laisvai pasirinkti natūralieji skaičiai, didesni už 1). Dabar jau nesunku nustatyti, kaip atrodys funkcija $f(x)$. Pavyzdžiui, imdami $x = 2^n$, gauname

$$f(x) = f(2^n) = f(2^{n-1}) + f(2) - 1 = f(2^{n-1}) + 1 =$$
$$= f(2^{n-2}) + f(2) = f(2^{n-2}) + 2 = \cdots = f(2) + n - 1 = n + 1,$$

o imdami $x = 7^n$, gauname

$$f(x) = f(7^n) = f(7^{n-1}) + f(7) - 1 = f(7^{n-1}) + k_7 - 1 =$$
$$= f(7^{n-2}) + f(7) - 1 + k_7 - 1 = f(7^{n-2}) + 2(k_7 - 1) = \cdots =$$
$$= f(7) + (n - 1)(k_7 - 1) = n(k_7 - 1) + 1,$$

todėl

$$f(2^{n_2} \cdot 7^{n_7}) = n_2 + 1 + n_7(k_7 - 1) + 1 - 1 = 1 + n_2 + n_7(k_7 - 1).$$

Tęsiant nesunku suskaičiuoti, kad jei

$$x = 2^{n_2} \cdot 3^{n_3} \cdot 5^{n_5} \cdot 7^{n_7} \cdot 11^{n_{11}} \dots$$

(čia tik baigtinis skaičius rodiklių n_i, nelygių nuliui), tai

$$f(x) = 1 + n_2 + n_3 + n_5 + n_7(k_7 - 1) + n_{11}(k_{11} - 1) + \cdots$$

Imdami paskutinėje išraiškoje $k_7 = k_{11} = k_{13} = \cdots = 2$, gauname, kad jei

$$x = 2^{n_2} \cdot 3^{n_3} \cdot 5^{n_5} \cdot 7^{n_7} \cdot 11^{n_{11}} \dots,$$

tai

$$f(x) = 1 + n_2 + n_3 + n_5 + n_7 + n_{11} + \cdots.$$

Matome, kad gautoji funkcija — tai tik kiek kitaip užrašyta (4) funkcija.

4) Taip pat įdomu išsiaiškinti, kokios funkcijos $f(x)$ tenkina vien 1) sąlygą. Aišku, kad užtenka apibrėžti $f(p)$ pirminiams p bet kaip:

$$f(2) = k_2, \quad f(3) = k_3, \quad f(5) = k_5, \quad f(7) = k_7, \quad \dots,$$

o tada vėl $f(x)$ bus apibrėžta vienareikšmiškai: jei $x = 2^{n_2} \cdot 3^{n_3} \cdot 5^{n_5} \cdot 7^{n_7} \dots$, tai

$$f(x) = 1 + n_2(k_2 - 1) + n_3(k_3 - 1) + n_5(k_5 - 1) + n_7(k_7 - 1) + \cdots.$$

Aišku, kad ji apibrėžta aibėje $\boldsymbol{N}$ įgyja reikšmes iš aibės $\boldsymbol{N}$ ir tenkina 1) sąlygą: jei

$$x = 2^{n'_2} \cdot 3^{n'_3} \cdot 5^{n'_5} \dots, \qquad y = 2^{n''_2} \cdot 3^{n''_3} \cdot 5^{n''_5} \dots,$$

tai

$$xy = 2^{n'_2+n''_2} \cdot 3^{n'_3+n''_3} \cdot 5^{n'_5+n''_5} \dots,$$

ir

$$\begin{aligned} f(xy) &= 1 + (n'_2 + n''_2)(k_2 - 1) + (n'_3 + n''_3)(k_3 - 1) + (n'_5 + n''_5)(k_5 - 1) + \cdots = \\ &= -1 + 1 + n'_2(k_2 - 1) + n'_3(k_3 - 1) + n'_5(k_5 - 1) + \cdots + \\ &\quad + 1 + n''_2(k_2 - 1) + n''_3(k_3 - 1) + n''_5(k_5 - 1) + \cdots = \\ &= f(x) + f(y) - 1. \end{aligned}$$

Beje, 1) sąlygą galima užrašyti taip:

$$[f(xy) - 1] = [f(x) - 1] + [f(y) - 1].$$

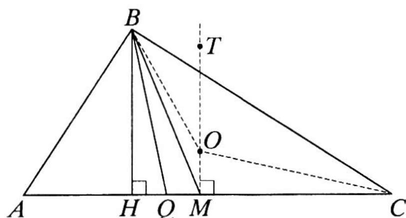
Tada, pažymėję $f(x) - 1 = g(x)$, turėsime:

$$g(xy) = g(x) + g(y) \tag{5}$$

Dabar uždavinį galima performuluoti funkcijai $g(x)$ (pabandykite patys), tik $g(x)$ įgis reikšmes neneigiamųjų sveikųjų skaičių aibėje $\boldsymbol{N} \cup \{0\}$. Įdomu taip pat nagrinėti funkcijas $g(x)$, apibrėžtas aibėje $\boldsymbol{N}$, bet įgyjančias reikšmes iš $\boldsymbol{R}$. Įsitikinome, kad tų funkcijų yra palyginti daug. Bet galima įrodyti įdomų faktą: jeigu (5) sąlygą tenkinanti funkcija monotoniška, tai ji yra logaritminė funkcija $g(x) = k \ln x$ ($k \in \boldsymbol{R}$) (beje, tai nelengvas uždavinys).

291. *Pirmas būdas.* Sakykime, kad $\triangle ABC$ — duotasis trikampis, B — kalbamoji viršūnė (žr. pav.), BH — aukštinė, BQ — pusiaukampinė, BM — pusiaukraštinė.

Galime laikyti, kad $AB < BC$. Tada



$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\angle ABH < \operatorname{tg}\angle HBC,\\
&\angle ABH < \angle HBC,\\
&2\angle ABH < \angle ABH + \angle HBC = \angle ABC,\\
&\angle ABH < \angle ABQ,
\end{aligned}$$

t. y. Q yra dešiniau H. Pagal sąlygą $\angle HBQ = \angle QBM$. Kadangi $\angle ABQ = \angle QBC$, tai $\angle ABH = \angle MBC$. Tegu O — apibrėžto apie $\triangle ABC$ apskritimo centras. Tada remiantis centrinio kampo savybe

$$\angle OBC = \frac{180^\circ - \angle BOC}{2} = 90^\circ - \frac{\angle BOC}{2} = 90^\circ - \angle BAC = \angle ABH = \angle MBC.$$

Vadinasi, taškas O yra tiesėje BM, bet, būdamas apibrėžtinio apskritimo oentras, yra kraštinės AC vidurio statmenyje OT. Trikampis ABC nėra lygiašonis, tiesės BM ir MT nesutampa, taigi $O = M$. Vadinasi, $\angle ABC$ remiasi į skersmenį, t. y. $\angle ABC = 90^\circ$.

Antras būdas. Uždavinį nesunku išspręsti remiantis trigonometrija. Pažymėkime $BH = h$, $\angle ABH = \angle MBC = \alpha$, $\angle HBQ = \angle QBM = \beta$. Tada

$$AH = h \operatorname{tg}\alpha, \qquad HM = h \operatorname{tg} 2\beta, \qquad HC = h \operatorname{tg}(\alpha + 2\beta).$$

Kadangi taškas M dalija kraštinę AC pusiau, tai $AH + HM = MC = HC - HM$, t. y.

$$\begin{aligned}
&h \operatorname{tg}\alpha + h \operatorname{tg} 2\beta = h \operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) - h \operatorname{tg} 2\beta,\\
&2 \operatorname{tg} 2\beta = \operatorname{tg}(\alpha + 2\beta) - \operatorname{tg}\alpha,\\
&\frac{2\sin 2\beta}{\cos 2\beta} = \frac{\sin 2\beta}{\cos(\alpha + 2\beta)\cos\alpha},\\
&\cos 2\beta = 2\cos(\alpha + 2\beta)\cos\alpha,\\
&\cos(2\alpha + 2\beta) = 0,
\end{aligned}$$

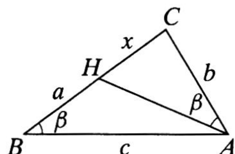
o tai ir reiškia, kad $2\alpha + 2\beta = \angle ABC = 90^\circ$.

XLVIII OLIMPIADA (1999 m.)

292. Skaičiaus 987 654 321 eilės numeris yra $9! = 362\,880$, o $362\,880 - 362\,761 = 119$. Vadinasi, nuo skaičiaus 987 654 321 reikia „grįžti“ per 119 pozicijų. Pastebime, kad $5! = 120$ yra „beveik“ 119. Todėl nagrinėkime skaičių 987 612 345. Jo eilės numerį pažymėkime n. Tada visi nurodytos sekos skaičiai tarp 987 612 345 ir 987 654 321 gaunami skaičiuje 987 612 345 perstatant galūnę 12 345. Tada skaičiaus 987 654 321 numeris yra $n + 5! - 1 = n + 119$. Vadinasi, $n + 119 = 362\,880$. Todėl $n = 362\,761$.

Atsakymas. 987 612 345.

293. *Pirmas būdas.* Iš sąlygos $a^2 > b^2$, todėl $\angle A > \angle B$. Iš viršūnės A brėžiame atkarpą AH, kuri su AC sudarytų kampą β. Atstumą HC pažymėkime x.



$\triangle ABC \backsim \triangle AHC$ pagal β ir bendrą kampą C. Todėl $\frac{x}{b} = \frac{AH}{c} = \frac{b}{a}$, iš kur $x = \frac{b^2}{a}$ ir $AH = \frac{bc}{a}$.

Remiantis duotąja lygybe $a^2 - b^2 - bc$, todėl $BH = a - x = a - \frac{b^2}{a} = \frac{a^2 - b^2}{a} = \frac{bc}{a} = AH$. Vadinasi, $\angle HAB = \beta$, ir $\angle A = 2\angle B$. Tai ir reikėjo įrodyti.

Antras būdas. Turime, kad

$$a^2 = b(b + c). \tag{1}$$

Sakykime, apie trikampį ABC apibrėžto apskritimo spindulys lygus R. Tada iš sinusų teoremos

$$\begin{aligned} a &= 2R \sin A, \\ b &= 2R \sin B, \\ c &= 2R \sin C = 2R \sin(\pi - A - B) = 2R \sin(A + B). \end{aligned}$$

Šias išraiškas sustatę į (1) lygybę, turime:

$$\begin{aligned} &4R^2 \sin^2 A = 4R^2 \sin B(\sin B + \sin(A + B)), \\ &2 \sin^2 A = 2 \sin^2 B + 2 \sin B \sin(A + B), \\ &1 - \cos 2A = 1 - \cos 2B + \cos A - \cos(A + 2B), \\ &\cos 2B + \cos(A + 2B) = \cos A + \cos 2A, \\ &\cos 2B - \cos 2A = \cos A - \cos(A + 2B), \\ &2 \sin(A - B) \sin(A + B) = 2 \sin B \sin(A + B). \end{aligned}$$

Kadangi $A + B < 180°$, tai $\sin(A + B) \neq 0$, todėl

$$\sin(A - B) = \sin B, \quad 2 \sin \frac{2B - A}{2} \cos \frac{A}{2} = 0.$$

Bet $A < 180°$, todėl $\cos \frac{A}{2} \neq 0$, taigi

$$\sin \frac{2B - A}{2} = 0.$$

Kadangi $-90° < -\frac{A}{2} < \frac{2B - A}{2} < B < 180°$, tai $\frac{2B - A}{2} = 0$, $A = 2B$.

Tai ir reikėjo įrodyti.

294. a) Taip. Iš tikrųjų, sakykime, kad realiųjų skaičių pora $(a; b)$ tenkina lygybę

$$\begin{aligned} (a + b)^2 + 1 = (a + 1)(b + 1) \Leftrightarrow a^2 + 2ab + b^2 + 1 = \\ = ab + a + b + 1 \Leftrightarrow a^2 + ab + b^2 = \\ = a + b. \end{aligned}$$

Pastarosios lygybės abi puses padauginę iš $a - b$, gausime

$$(a-b)(a^2+ab+b^2) = (a-b)(a+b) \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow a^3 - b^3 = a^2 - b^2 \Leftrightarrow a^2(a-1) = b^2(b-1).$$

b) Ne, nevisada. Pavyzdžiui, pora (1; 1) tenkina lygybę $a^2(a-1) = b^2(b-1)$, bet netenkina lygybės $(a+b)^2 + 1 = (a+1)(b+1)$.

295. Skaičius 1 netenkina uždavinio sąlygos, nes neturi skirtingų daliklių.

Sakykime, natūralusis skaičius $n > 1$ tenkina uždavinio sąlygą. Pažymėkime p mažiausią pirminį skaičiaus n daliklį.

Kadangi n visada dalijasi iš 1, o p yra mažiausias (neskaitant 1) daliklis, tai pagal sąlygą

$$1 \cdot p > \frac{n}{5}, \quad \frac{n}{p} < 5.$$

Kadangi $\frac{n}{p}$ sveikasis skaičius, tai $\frac{n}{p}$ gali būti lygus 4, 3, 2, 1.

Jeigu $\frac{n}{p} = 4$, t. y. $n = 4p$, tai skaičius n turi pirminį daliklį 2. Vadinasi, mažiausias pirminis daliklis $p = 2$ ir $n = 8$.

Jeigu $\frac{n}{p} = 3$, t. y. $n = 3p$, tai mažiausias pirminis daliklis $\leqslant 3$, taigi p lygus 2 arba 3, ir gauname $n = 6$ arba $n = 9$.

Jeigu $\frac{n}{p} = 2$, t. y. $n = 2p$, tai $p = 2$ ir $n = 4$.

Jeigu $\frac{n}{p} = 1$, tai $n = p$.

Atsakymas. Skaičiai 4, 6, 8, 9 ir visi pirminiai skaičiai.

296. a) Iš pirmos lygties $x(1+x^2) = y^2 + z^2$, taigi $x_0 \geqslant 0$. Analogiškai $y_0 \geqslant 0$ ir $z_0 \geqslant 0$.

b) Pavyzdžiui, (0; 0; 0) ir (1; 1; 1).

Iš pirmos lygybės atėmę antrąją, gausime

$$x^3 - y^3 + x^2 - y^2 + x - y = 0, \quad (x-y)(x^2 + xy + y^2 + x + y + 1) = 0.$$

Kadangi antras dauginamasis remiantis punktu a) teigiamas, tai $x = y$. Analogiškai, iš pirmos lygties atėmę trečią, gautume $x = z$. Vadinasi, $x = y = z$.

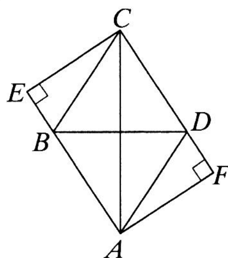
Tada

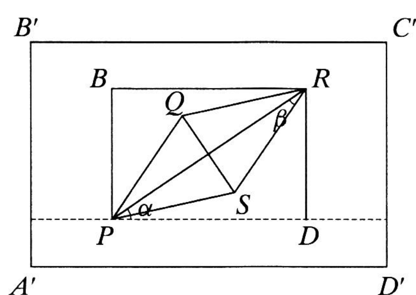
$$x^3 - x^2 = x^2 - x, \quad x(x-1)^2 = 0.$$

Iš čia $x = 0$ arba $x = 1$. Taigi trejetai (0; 0; 0) ir (1; 1; 1) — vieninteliai duotos sistemos sprendiniai.

Atsakymas. (0; 0; 0), (1; 1; 1).

297. Stačiakampio, iš kurio galima iškirpti nurodytą rombą, pavyzdys parodytas paveikslėlyje a).





Nesunku apskaičiuoti šio stačiakampio plotą. Rombo plotas lygus $\frac{1}{2} \cdot 6 \cdot 8 = 24$, o jo kraštinė $\sqrt{3^2+4^2} = 5$. Kadangi CE yra rombo aukštinė, tai $CE = \frac{24}{5}$. Vadinasi, $BE^2 = CB^2 - CE^2 = 5^2 - \left(\frac{24}{5}\right)^2 = \left(5+\frac{24}{5}\right)\left(5-\frac{24}{5}\right) = \frac{49}{5}\cdot\frac{1}{5}$, taigi $BE = \frac{7}{5}$. Stačiakampio $AECF$ kraštinė $AE = 5+\frac{7}{5} = \frac{32}{5}$, o jo plotas $AE\cdot CE = \frac{32}{5}\cdot\frac{24}{5} = 32\left(1-\frac{1}{25}\right) = 32-\frac{32}{25} = 31 - \frac{7}{25} = 30\frac{18}{25}$.

Įrodysime, kad jei iš stačiakampio galima iškirpti nurodytų matmenų rombą, tai to stačiakampio plotas ne mažesnis už $30\frac{18}{25}$.

Sakykime, kad iš stačiakampio $A'B'C'D'$ galima iškirpti rombą $PQRS$, čia $PR = 8$, $QS = 6$ (žr. b) pav.).

Tada stačiakampį galima lygiagrečiai suspausti iki stačiakampio $PBRD$.

Pažymėkime α kampą tarp tiesių PR ir PD. Galima laikyti, kad $\alpha \leqslant \frac{\pi}{4}$, nes priešingu atveju nagrinėtume kampą tarp PR ir PB, kuris būtų $< \frac{\pi}{4}$.

Jeigu kampą RPS pažymėsime β, tai aišku, kad kampas α gali kisti nuo β iki $\frac{\pi}{4}$. Stačiakampio $PBRD$ plotas $RD \cdot PD = 8\sin\alpha \cdot 8\cos\alpha = 32\sin 2\alpha$, ir mažiausia jo reikšmė yra $32\sin 2\beta = 64\sin\beta\cos\beta = 64\cdot\frac{3}{5}\cdot\frac{4}{5}$. Šitą skaičių jau pažįstame — tai ir yra stačiakampio $AECF$ plotas.

Vadinasi, tas plotas ir yra mažiausias.

Beje, iš sprendimo visiškai aišku, kad mažiausio ploto reikiamas stačiakampis yra vienintelis.

Atsakymas. Mažiausias tokio stačiakampio plotas yra $30\frac{18}{25}$.

298. a) Pavaizduoto kvadrato visų skaičių suma yra lygi sumai skaičių, esančių paskutiniame stulpelyje ar paskutinėje eilutėje, taigi lygi 7.

1	0	1	0	1	0	1
0	–1	0	–1	0	–1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	–1	0	–1	0	–1	0
1	0	1	0	1	0	1
0	–1	0	–1	0	–1	0
1	0	1	0	1	0	1

b) Įrodysime bendresnį teiginį: kvadratas $(2n+1)\times(2n+1)$, kur n — natūralusis skaičius, padalytas į $(2n+1)^2$ vienetinius kvadratėlius. Į kiekvieną kvadratėlį įrašytas

moduliu ne didesnis už vienetą skaičius taip, kad kiekviename kvadrate 2×2 esančių skaičių suma lygi 0. Įrodysime, kad visų parašytų skaičių suma ne didesnė už $2n + 1$.

Įrodysime indukcijos būdu pagal n.

Sakykime, kad $n = 1$, o į lentelę surašyti skaičiai tenkina teiginio sąlygą:

a	b	c
d	e	f
g	h	i

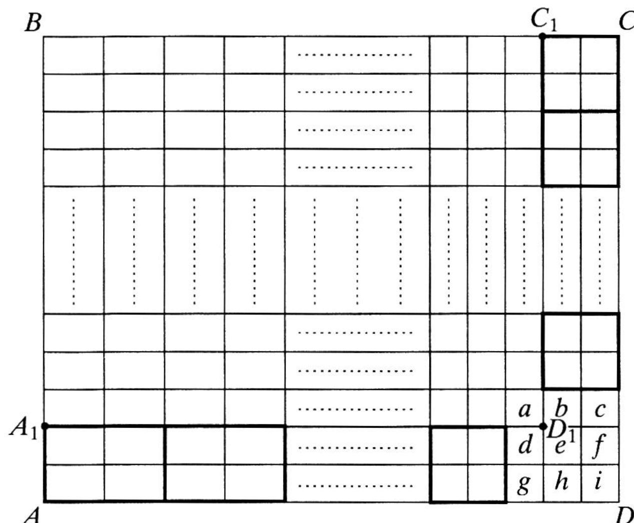
Tada

$$\begin{aligned} &a+b+c+d+e+f+g+h+i = \\ &= a+b+c+d+g+(e+f+h+i) = \\ &= a+b+c+d+g = \\ &= a+(b+c+e+f)-e-f+(d+g+e+h)-e-h = \\ &= a-2e-f-h = a-(e+f+h+i)-e+i = a-e+i \leqslant 3. \end{aligned}$$

Taigi, visų lentelėje parašytų skaičių suma ne didesnė už 3.

Tarkime, kad teiginys teisingas, kai $k = n$. Įrodysime, kad teiginys teisingas ir su $k = n + 1$.

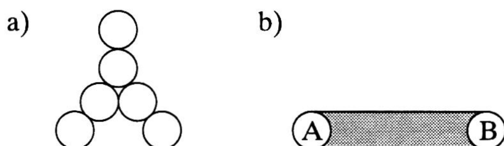
Nagrinėkime kvadratą $(2n + 3) \times (2n + 3)$ padalytą į $(2n + 3)^2$ vienetinių kvadratėlių, kuriame surašyti skaičiai, tenkinantys uždavinio sąlygą (žr. pav.).



Tada kvadrate $A_1BC_1D_1$ surašyti skaičiai tenkina teiginio sąlygą, todėl pagal indukcijos prielaidą šiame kvadrate parašytų skaičių suma ne didesnė už $2n + 1$. Prisiminę kvadratą 3×3, randame, kad kvadrate $ABCD$ parašytų skaičių suma ne didesnė už $2n + 1 + b + c + d + e + f + g + h + i = 2n + 1 + i - e \leqslant 2n + 1 + 2 = 2n + 3$. Taigi teiginys teisingas, kai $k = 2n + 3$. Remiantis indukcijos principu, teiginys teisingas visiems natūraliesiems n.

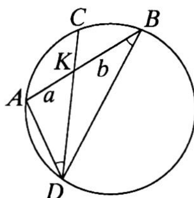
Kadangi visi dėmenys ne didesni už 1, tai $S_{2n+1} \leqslant 2n + 1$.

299. Paveikslėlyje a) pavaizduotas monetų išsidėstymas, kai trys iš jų laisvos.



Parodysime, kad mažiau laisvų monetų negali būti. Sakykime, kad egzistuoja monetų išsidėstymas, kuriame laisvų yra mažiau nei trys. Paimkime ir apjuoskime šias monetas siūlu taip, kad siūlas įsitemptų (t. y. imkime monetų krūvos iškilą apvalkalą). Tada siūlas lies bent dvi monetas. Aišku, kad kiekviena siūlo liečiama moneta yra laisva. Todėl laisvų monetų yra lygiai dvi, pažymėkime jas A ir B. Bet tada visos kitos monetos bus išsidėsčiusios paveikslėlyje b) užštrichuotoje dalyje, ir akivaizdu, kad kiekviena jų bus laisva! Prieštara.

300. Sujunkime D su A ir su B. Kampai ADK ir ABD remiasi į lygius lankus AD ir AC, todėl yra lygūs.



Bet trikampiai DAK ir DAB turi dar bendrą kampą, todėl yra panašūs. Vadinasi, $AD : AB = AK : AD$, $AD^2 = AB \cdot AK = (a+b)a$. Vadinasi, $AD = \sqrt{a(a+b)}$.

Atsakymas. $\sqrt{a(a+b)}$.

301. Žr. 298 uždavinį.

302. Sudauginkime pirmą ir trečią lygtis ir atimkime antrą lygtį pakeltą kvadratu. Gauname

$$xy^5 + x^5y - 2x^3y^3 = 0, \quad xy(x^4 - 2x^2y^2 + y^4) = 0,$$
$$xy(x^2 - y^2) = 0, \quad xy(x+y)(x-y) = 0.$$

Dabar nagrinėsime keturis atvejus.

i) Jei $x = 0$, tai sistema virsta $y = y^3 = y^5 = m$. Lygtis $y = y^3$ turi sprendinius $0, \pm 1$, taigi gauname 3 sistemos sprendinius $(0; m)$, kai $m = 0, \pm 1$.

ii) Jei $y = 0$, tai analogiškai gauname sprendinius $(m; 0)$, kur $m = 0, \pm 1$ (iš jų sprendinys $(0; 0)$ jau kartojasi).

iii) Jei $x = -y$, tai sistema virsta $0 = m$. Tai reiškia, kad sistema turi sprendinius $(t; -t)$, $t \in \boldsymbol{R}$, kai $m = 0$ (sprendinys $(0; 0)$ vėl kartojasi).

iv) Jei $x = y$, tai sistema virsta $2x = 2x^3 = 2x^5 = m$. Analogišką sistemą jau sprendėme — jos sprendiniai yra $\frac{m}{2}$, kai $m = 0, \pm 2$. Vadinasi, gauname pradinės sistemos sprendinius $(\frac{m}{2}; \frac{m}{2})$, kai $m = 0, \pm 2$ (sprendinys $(0; 0)$ vėl kartojasi).

Surinkę visų atvejų m reikšmes, gauname $0, \pm 1, \pm 2$. Su kiekviena jų išrašome atitinkamus sprendinius.

Atsakymas. a) Sistema turi bent vieną sprendinį, kai $m = 0, \pm 1, \pm 2$. b) Kai $m = -1$, tai $(0; -1), (-1; 0)$; kai $m = 1$, tai $(0; 1), (1; 0)$; kai $m = -2$, tai $(-1; -1)$; kai $m = 2$, tai $(1; 1)$; kai $m = 0$, tai $(t; -t), t \in \boldsymbol{R}$.

303. Pastebime, kad $899 = 900 - 1 = 30^2 - 1^2 = 29 \cdot 31$. Kadangi skaičiai 29 ir 31 — pirminiai, tai skaičius $N(n) = 36^n + 24^n - 7^n - 5^n$ dalijasi iš 899 tada ir tik tada, kai jis dalijasi iš 29 ir iš 31.

Sakykime n — lyginis natūralusis skaičius. Pažymėkime $n = 2m$. Tada $36^n - 7^n$ dalijasi iš $36 - 7 = 29$. Skaičius $24^n - 5^n = 24^{2m} - 5^{2m} = (24^2)^m - (5^2)^m$ dalijasi iš $24^2 - 5^2 = 29 \cdot 19$, taigi ir iš 29.

Skaičius $36^n - 5^n$ dalijasi iš $36 - 5 = 31$. Skaičius $24^n - 7^n = 24^{2m} - 7^{2m} = (24^2)^m - (7^2)^m$ dalijasi iš $24^2 - 7^2 = 31 \cdot 17$, taigi ir iš 31.

Vadinasi, kai n — lyginis, tai skaičius $N(n)$ dalijasi iš 31 ir iš 29, todėl $N(n)$ dalijasi iš 899. Dabar sakykime, kad n — nelyginis. Pažymėkime $n = 2m + 1$, kur m — neneigiamas sveikas skaičius. Pakanka įrodyti, kad $N(n)$ nesidalija iš 29, tada $N(n)$ nesidalys ir iš 899. Iš tikrųjų, $N(n) = N(2m + 1) = 36^{2m+1} - 7^{2m+1} + 24^{2m+1} - 5^{2m+1} = 36^{2m+1} - 7^{2m+1} + 19 \cdot 24^{2m+1} + 5(24^{2m} - 5^{2m})$ skaičius $36^{2m+1} - 7^{2m+1}$ dalijasi iš $36 - 7 = 29$. Skaičius $24^{2m} - 5^{2m}$ taip pat dalijasi iš 29, nes $2m$ — lyginis. Bet nei 19, nei 24 nesidalija iš 29, todėl skaičius $N(2m + 1)$ nesidalija iš 29.

Atsakymas. Su bet kuriomis lyginėmis reikšmėmis.

XLIX OLIMPIADA (2000 m.)

304. Pažymėkime x, y, z, t — vaikų amžius taip, kad $x < y < z < t$. Tada iš sąlygos turime

$$(x - 1)^2 + (y - 1)^2 + (z - 1)^2 = (t - 1)^2,$$

$$(y + 1)^2 + (z + 1)^2 = (x + 1)^2 + (t + 1)^2.$$

Sudėję ir atėmę panariui šias lygybes gauname

$$y^2 + z^2 = t^2 + 2x - 1, \tag{1}$$

$$y + z = t + \frac{x^2 + 1}{2}. \tag{2}$$

Taigi x nelyginis, o kadangi $x \geqslant 2$, tai $x \geqslant 3$.

Kadangi $z < t$, tai iš (2) gauname $y > \frac{x^2+1}{2}$.

Jei $x > 5$, tai $y > \frac{6^2+1}{2} > 18$. Todėl $x \leqslant 5$. Sakykime $x = 5$, tada $y > \frac{5^2+1}{2} = 13$, o tai reiškia, kad $y = 14$, $z = 15$, $t = 16$. Bet šis ketvertas netenkina uždavinio sąlygos. Vadinasi, $x = 3$. Tada (1) ir (2) perrašome taip

$$y^2 + z^2 - 5 = t^2, \quad y + z - 5 = t.$$

Todėl $y^2 + z^2 - 5 = (y + z - 5)^2$.

$$yz - 5y - 5z + 15 = 0, \quad (y - 5)(z - 5) = 10.$$

Atsižvelgus į tai, kad $z > y$, turime du galimus dvejetus $y = 6$, $z = 15$ ir $y = 7$, $z = 10$. Pirmu atveju $t = y + z - 5 = 16$, tada $2^2 + 5^2 + 14^2 = 15^2$. Antru atveju gauname $t = y + z - 5 = 12$. Ketvertas $x = 3$, $y = 7$, $z = 10$, $t = 12$ taip pat tenkina uždavinio sąlygą: $3^2 + 7^2 + 10^2 = 12^2$.

Atsakymas. Vaikų amžiai — atitinkamai 3, 7, 10 ir 12 metų arba 3, 6, 15 ir 16 metų.

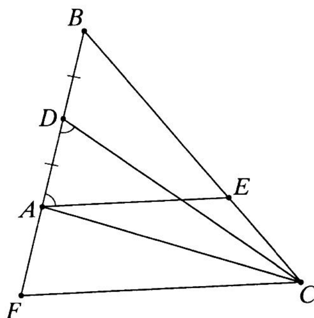
305. Pastebime, kad

$$a_1 \cdot a_2 = 3 \cdot 7 = 21 = a_4,$$
$$a_2 \cdot a_3 = 7 \cdot 13 = 91 = a_9.$$

Įrodysime, kad $a_{n-1} \cdot a_n = a_{n^2}$.

Iš tikrųjų $a_{n-1}a_n = ((n-1)^2 + n - 1 + 1)(n^2 + n + 1) = (n^2 - n + 1)(n^2 + n + 1) = (n^2 + 1)^2 - n^2 = n^4 + n^2 + 1 = a_{n^2}$.

306. Tiesėje AB pažymėkime tašką F taip, kad $AD = AF$ ir taškas A būtų tarp taškų B ir F.



Tada $FC \parallel AE$. Todėl $\angle AFC = \angle DAE = \angle ADC$. Vadinasi, trikampis DCF — lygiašonis, o AC — jo pusiaukraštinė, kuri kartu yra ir aukštinė. Taigi, $\angle BAC = 90°$.

Atsakymas. $\angle BAC = 90°$.

307. *Pirmas būdas.* Sakykime (x, y, z) — toks natūraliųjų skaičių trejetas, kad $x \leqslant y \leqslant z$ ir

$$\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = n,$$

kur n — natūralus skaičius.

Aišku, kad $n \leqslant 3$, nes $x \geqslant 1$, $y \geqslant 1$, $z \geqslant 1$.

Jei $n = 3$, tai $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant 3$ ir lygybė įmanoma tik kai $x = y = z = 1$.

Jei $n = 2$, tai $x = 1$, nes priešingu atveju $x \geqslant 2$ ir $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{1}{2} + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 2$. Tada $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$.

Jei $y > 2$, tai $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{2} + \frac{1}{2} < 1$.

Vadinasi, $y = 2$, o tada $z = 2$.

Jei $n = 1$, tai $x \leqslant 3$. Iš tikrųjų, jei $x > 3$, tai $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{3}{4} < 1$. Taigi $x \leqslant 3$. Todėl a) $x = 2$ arba b) $x = 3$.

a) Jei $x = 2$, tai $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$. Bet jei $y > 4$, tai $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} < \frac{1}{4} + \frac{1}{4} = \frac{1}{2}$. Todėl $y = 4$ (tada $z = 4$) arba $y = 3$, tada $z = 6$.

Taigi gavome dar du sprendinius: $(2, 3, 6)$ ir $(2, 4, 4)$.

b) Jei $x = 3$, tai $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3}$. Bet tada $y \geqslant 3$, $z \geqslant 3$, $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} \leqslant \frac{2}{3}$, ir lygybė įmanoma tik kai $y = z = 3$.

Antras būdas. Aišku, kad $n \leqslant 3$. Jei $n = 3$, tai

$$\left(1 - \frac{1}{x}\right) + \left(1 - \frac{1}{y}\right) + \left(1 - \frac{1}{z}\right) = 0$$

ir kadangi kiekvieni skliaustai neneigiami, tai visi jie lygūs 0.

Jei $n = 2$, tai $x = 1$ (priešingu atveju kiekvienas kairės pusės dėmuo ne didesnis už $\frac{1}{2}$). Gauname lygtį $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$, $y + z = yz$, $(y - 1)(z - 1) = 1$.

Vadinasi, $y - 1 = 1$ ir $z - 1 = 1$.

Pagaliau, jei $n = 1$, tai turime lygtį $\frac{1}{x} + \frac{1}{y} + \frac{1}{z} = 1$. Aišku, kad $x \neq 1$ ir kad $x \leqslant 3$ (kitaip kairė pusė ne didesnė už $\frac{3}{4}$). Kai $x = 2$, tai gauname lygtį $\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{1}{2}$, $2y + 2z = yz$, $(y - z)(z - 2) = 4$.

Kadangi $y - 2$ yra skaičiaus 4 daliklis, tai $y - 2 = 1$ arba $y - 2 = 2$ ($y - 2 \neq 4$, nes $z \geqslant y$, ir kairė pusė bus per didelė). Atitinkamai gauname $y = 3$, $z = 6$ arba $y = 4$, $z = 4$.

Kai $x = 3$, tai gauname lygtį

$$\frac{1}{y} + \frac{1}{z} = \frac{2}{3},$$
$$3y + 3z = 2yz,$$
$$4yz - 6y - 6z = 0,$$
$$(2y - 3)(2z - 3) = 9.$$

Kadangi $y \geqslant 3$, $z \geqslant 3$, tai $2y - 3 \geqslant 3$, $2z \geqslant 3$ ir $y = 3$ (priešingu atveju kairė pusė bus per didelė).

Atsakymas. (1, 1, 1), (2, 3, 6), (2, 4, 4), (3, 3, 3), (3, 6, 6).

308. Sakykime buvo surengta m rungčių. Tada $m(A + B + C) = 40$. Kadangi A, B, C — skirtingi, tai $A + B + C \geqslant 6$, todėl $m = 2$ arba $m = 4$ arba $m = 5$. $m = 2$ negali būti, nes tada už pirmą vietą gaunama ne mažiau 11 taškų (lakūnas K), o tuo pačiu ir ne daugiau 9 (lakūnas L).

Jei $m = 4$, tada $A \geqslant 6$. Kadangi $A + B + C = 10$, tai galimi šie atvejai $A = 6$, $B = 3$, $C = 1$ arba $A = 7$, $B = 2$, $C = 1$. Pirmasis atvejis negalimas, nes lakūnas K per 4 rungtis surenka 22 taškus. Antrasis atvejis negalimas, nes lakūnas M per 4 rungtis surenka 9 taškus.

Taigi lieka $m = 5$. Tada $A + B + C = 8$. Kadangi lakūnas K per penkias rungtis surenka 22 taškus, tai už pirmą vietą duodami mažiausiai 5 taškai. Vadinasi, vienintelis galimas (A, B, C) rinkinys (5, 2, 1). Taigi varžybų rezultatų lentelė atrodo taip:

Rungtis / Dalyviai	Reakcijos	Ištvermės	X	Y	Z
K	2	5	5	5	5
L	5	1	1	1	1
M	1	2	2	2	2

Atsakymas. Lakūnas M.

309. a) Pavyzdžiui, $f(x) = x$. Apskritai, uždavinio sąlygą tenkina bet kuri tiesinė funkcija $f(x) = ax + b$.

b) Tarkime, kad funkcija $f(x)$ tenkina nurodytas uždavinyje sąlygas. Tada

$$(x + y)\big(f(x) - f(y)\big) = f(x^2) - f(y^2) \quad (1)$$

su visais x, y — realiaisiais skaičiais.

(1) lygybėje imkime $y = 0$:

$$xf(x) - xf(0) = f(x^2) - f(0). \tag{2}$$

Dabar (1) lygybėje imkime $y = 1$:

$$(x+1)f(x) - (x+1)f(1) = f(x^2) - f(1). \tag{3}$$

Iš (3) lygybės atėmę (2) panariui, gausime

$$f(x) = \big(f(1) - f(0)\big)x - f(0).$$

Pasižymėję $f(1) - f(0) = a$, $f(0) = b$, gauname, kad ieškomoji funkcija yra tikrai tiesinė: $f(x) = ax + b$. Dar reikia įsitikinti, kad tinka visi a ir b. Iš tikrųjų, kairė lygybės pusė virsta

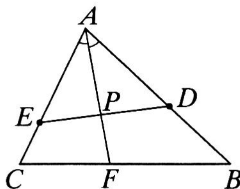
$$(x+y)(ax + b - ay - b) = a(x^2 - y^2),$$

o dešinė

$$(ax^2 + b) - (ay^2 + b) = a(x^2 - y).$$

Vadinasi, iš tikrųjų su bet kuriais a ir b (1) lygybė teisinga su visais x ir y.

310. Sakykime, kad tiesė, dalijanti trikampio perimetrą ir plotą pusiau, kerta trikampio kraštines AC ir AB taškuose E ir D atitinkamai.



Išveskime pusiaukampinę AF ir jos susikirtimo su tiese ED tašką pažymėkime P. Tegul r_1 — taško P atstumas iki kraštinių AB ir AC. Tada

$$\frac{1}{2}S_{\triangle ABC} = S_{\triangle ADE} = \frac{1}{2}(AD + AE)r_1 = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}Pr_1 = \frac{1}{4}Pr,$$

čia r — į trikampį ABC įbrėžto apskritimo spindulys.

Taigi $r = r_1$, todėl P — į trikampį ABC įbrėžto apskritimo centras.

Atvirkštinis teiginys nėra teisingas. Pavyzdžiui, galima imti trikampį ABC, kurio kampas B — status, o tiesė eina per ibrėžtinio apskritimo centrą ir viršūnę A.

311. Pakanka pastebėti, kad su kiekvienu natūraliuoju n, ketvertas $(1, 2, n, n+1)$ yra lygties sprendinys. Iš tikrųjų, tada kairė pusė lygi

$$5 + n^2 + (n+1)^2 = 2n^2 + 2n + 6.$$

Tam pačiam reiškiniui lygi ir dešinė pusė:

$$2n(n+1) + 6 = 2n^2 + 2n + 6.$$

Imdami skirtingus n, gauname skirtingus sprendinius, taigi sprendinių yra be galo daug.

L OLIMPIADA (2001 m.)

312. a) Pabandę įrašinėti konkrečius skaičius, greitai susekame, kad $1024 = 2^{10} = 6! + 304 = 720 + 304$, t. y. pora (10; 6) yra lygties sprendinys.

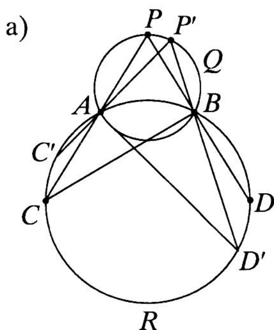
b) Pastebėkime, kad jeigu y lygybėje $2^x = y! + 304$ yra „didelis", tai $y!$ dalijasi iš didelio dvejeto laipsnio. Bet tada ir $2^x (> y!)$ didelis, t. y. dalijasi iš didelio dvejeto laipsnio. Vadinasi, ir jų skirtumas $2^x - y! = 304$ dalijasi iš didelio dvejeto laipsnio, o taip nėra: $304 = 19 \cdot 16$ dalijasi tik iš 2^4. Vadinasi, didelių sprendinių lygtis neturi.
Konkrečiai lygtis galėtų būti nagrinėjama taip: kadangi $2^8 < 304 < 2^9$, tai $x \geqslant 9$. Tada $y! \geqslant 512 - 304 = 208$, ir pirmasis didesnis kaip 208 faktorialas yra 6!, t. y. $y \geqslant 6$. Kadangi $6! = 720 = 45 \cdot 16$, tai pradinę lygybę padaliję iš 16 gauname

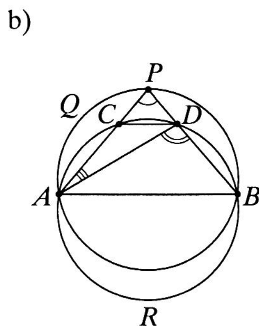
$$2^{x-4} = 45 \cdot (7 \cdot 8 \cdot \dots \cdot y) + 19.$$

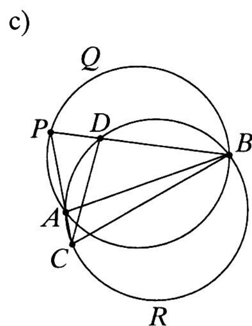
Dabar aišku, kad $y < 8$ (jei $y \geqslant 8$ („didelis"), tai kairioji pusė lyginė, o dešinioji — nelyginė). Taigi lieka ištirti atvejus $y = 6$ ir $y = 7$.
Jei $y = 6$, tai $2^{x-4} = 45 + 19 = 64$ ir $x = 10$, o šį sprendinį jau esame minėję.
Jei $y = 7$, tai $2^{x-4} = 45 \cdot 7 + 19 = 334$, $2^{x-5} = 167$, ir sveikųjų x nėra.

Atsakymas. Yra vienintelė tokia pora (10; 6).

313. Pastumkime tašką P į kitą padėtį P', o atitinkamus tiesių $P'A$ ir $P'B$ kirtimosi su apskritimu R taškus pažymėkime C' ir D' (žr. a) pav.).







Įbrėžtiniai kampai PAP' ir PBP' remiasi į tą patį apskritimo Q lanką PP', todėl yra lygūs. Lygūs yra ir kryžminiai jiems kampai $C'AC$ ir $D'BD$.

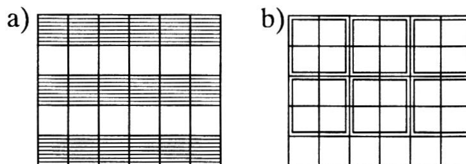
Kampai CAD' ir CBD' irgi lygūs, nes remiasi į tą patį apskritimo R lanką CD'. Vadinasi, kampai $\angle CBD = \angle D'BD + \angle CBD'$ ir $\angle C'AD' = \angle C'AC + \angle CAD'$ yra lygūs, todėl lygios ir juos jungiančios stygos CD ir $C'D'$.

Atrodytų, sprendimas baigtas, o uždavinys labai paprastas (kai kurie vertinimo komisijos nariai net siūlė šį uždavinį pakeisti sunkesniu). Bet olimpiados nugalėtojai tuoj pat pastebėjo, kad toks sprendimas nėra išsamus: juk reikia išnagrinėti ne tik atvejį, kai abu taškai C ir D yra kitoje tiesės AB pusplokštumėje negu taškas P (tokį atvejį žymėkime $P(2)$, žr. b) pav.), o ir atvejus, kai toje pat pusplokštumėje kaip ir P (atvejis $P(0)$, žr. c) pav.) arba taškai C ir D yra skirtingose tiesės AB pusplokštumėse (atvejis $P(1)$, žr. c) pav.).

Vien už tokį pastebėjimą komisija davė visus 7 taškus (sprendimas be panašios pastabos buvo vertinamas 6 taškais), nes abiejų kitų atvejų įrodymas nors ir skiriasi, bet labai panašus

į pirmojo (siūlome įsitikinti). Šiaip jau turėdami du taškus P ir P' privalome išnagrinėti atvejus $P(2)$ ir $P'(2)$, $P(2)$ ir $P'(1)$, $P(2)$ ir $P'(0)$, $P(1)$ ir $P'(1)$, $P(1)$ ir $P'(0)$, $P(0)$ ir $P'(0)$. Žinoma, praktiškai tai daroma taip: išnagrinėjami keli būdingi atvejai, ir pasakoma, kad kiti atvejai nagrinėjami analogiškai.

314. a) Šiek tiek pabandę, greitai randame tinkamą užtušavimą (žr. a) pav.).



b) Imkime 6 kvadratus 2×2, nurodytus b) pav. Kadangi kiekviename kvadrate gali būti daugiausiai du užtušuoti kvadratėliai, tai apatinėje eilėje turi būti užtušuoti ne mažiau kaip 6 kvadratėliai.

Vadinasi, joje užtušuoti visi 6 kvadratėliai. Analogiškai viršutinėje eilėje užtušuoti visi 6 kvadratėliai. Bet tada nei antroje, nei penktoje eilėje neužtušuotas nė vienas kvadratėlis. Vadinasi, visi likusieji užtušuoti kvadratėliai yra vidurinėje eilėje.

Įrodėme, kad a) pav. užtušavimas yra vienintelis.

c) Kai užtušuoti 19 kvadratėlių, imkime kuriuos nors 18 kvadratėlių. Kaip jau įrodėme, tai bus a) pav. užtušuotieji kvadratėliai. Bet tada devynioliktam kvadratėliui nebelieka vietos.

Atsakymas. a) Žr. a) pav. b) Vienintelis būdas, žr. a) pav.

315. Iš uždavinio sąlygos aišku, jog kiekviename tinkamame skaičiuje visada yra arba 8, arba 1, bet ne abu minėti skaitmenys. Be to, aišku, jog skaičių tiek su skaitmeniu 1, tiek su skaitmeniu 8 yra po lygiai (jei kuris nors iš jų yra tinkamo skaičiaus $\overline{a_1a_2a_3a_4}$ skaitmuo, tai kitas yra skaičiaus $\overline{(9-a_4)(9-a_3)(9-a_2)(9-a_1)}$ skaitmuo. Todėl pakanka surasti, kiek yra tinkamų keturženklių skaičių, turinčių skaitmenį 8.

Reikia pasirinkti dar 3 skaitmenis iš likusių 8 (skaitmens 1 nėra, skaitmuo 8 jau paimtas). Kai tik tie 3 skaitmenys bus pasirinkti, keturženklį skaičių gausime automatiškai, išrikiavę visus 4 skaitmenis mažėjimo tvarka. Suskaičiuokime, keliais būdais galima pasirinkti tuos 3 skaitmenis iš 8. Sakykime, kad tokių būdų yra x. Vadinasi, yra x triženklių skaičių, kurių skaitmenys mažėja. Mums lengviau suskaičiuoti visų „nesutvarkytų" triženklių skaičių kiekį (čia ir toliau nesutvarkytas triženklis skaičius gali prasidėti ir nuliu). Jeigu 3 skaitmenys jau pasirinkti, tai yra tik vienas iš jų sudarytas triženklis skaičius, kurio skaitmenys mažėja. Perstatę tuos skaičius, gauname 6 skaičius (pirmą skaitmenį galima pasirinkti trim būdais, antrą — dviem būdais, trečią — vienu būdu, ir pagal sandaugos taisyklę $3\times2\times1=6$ būdai).

Vadinasi, iš x sutvarkytų skaičių gausime $6x$ nesutvarkytų skaičių. Dabar kitaip suskaičiuokime, kiek yra nesutvarkytų triženklių skaičių. Pirmą skaitmenį galime pasirinkti 8 būdais, antrą skaitmenį — 7 būdais, trečią skaitmenį — 6 būdais, todėl skaičių sudaryti galima $8\cdot7\cdot6$ būdų.

Todėl $6x=8\cdot7\cdot6$, ir $x=8\cdot7=56$. Taigi yra 56 sutvarkyti skaičiai, kurie neturi vieneto, ir tiek pat skaičių, kurie neturi skaitmens 8.

Vadinasi, iš viso yra $52\cdot2=112$ sąlygą tenkinančių skaičių.

Pastaba. Žinoma, nelabai sunku pagal kokią nors sistemą išrašyti visus skaičius. Taip irgi įsitikiname, kad jų yra 112.

Atsakymas. 112 skaičių.

316. Kadangi trys skirtingi lygties $x^3 + x^2 = m$ sprendiniai sudaro aritmetinę progresiją, tai patogu juos pažymėti „simetriškai": $x - d$, x, $x + d$.

Tada

$$(x-d)^3 + (x-d)^2 = m, \quad (1)$$
$$x^3 + x^2 = m, \quad (2)$$
$$(x+d)^3 + (x+d)^2 = m. \quad (3)$$

Sudėję (1) ir (3) lygtis ir atėmę dvigubą (2), gauname

$$6xd^2 + 2d^2 = 0.$$

Kadangi remiantis sąlyga $d \neq 0$, tai $x = -\frac{1}{3}$, ir iš (2) lygties gauname

$$m = \left(-\frac{1}{3}\right)^3 + \left(-\frac{1}{3}\right)^2 = \frac{2}{27}.$$

Iš (3) lygties atėmę (1) ir padaliję pusiau, gauname

$$3x^2d + d^3 + 2xd = 0,$$

o įstatę $x = -\frac{1}{3}$ turime

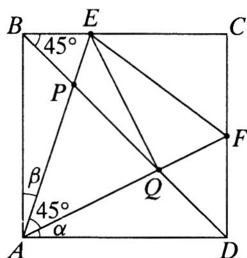
$$d\left(d^2 + \frac{1}{3} - \frac{2}{3}\right) = 0, \quad d^2 = \frac{1}{3}, \quad d = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}.$$

Abiem atvejais gauname tris sprendinius $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} \pm \frac{\sqrt{3}}{3}$, kuriuos galima surikiuoti į aritmetinę progresiją. Kad lygčiai $x^3 + x^2 = \frac{2}{27}$ tinka $x = -\frac{1}{3}$, jau matėme. Tenkina lygtį ir kiti du sprendiniai $x + d$ (čia $x = -\frac{1}{3}$, $d = \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$), nes

$$(x+d)^3 + (x+d)^2 = (x+d)^2(x+ \quad +d+1) =$$
$$= (x^2 + 2xd + d^2)\left(-\frac{1}{3} + d + 1\right) =$$
$$= \left(\frac{1}{9} - \frac{2}{3}d + \frac{1}{3}\right)\left(d + \frac{2}{3}\right) = \left(\frac{4}{9} - \frac{2}{3}d\right)\left(d + \frac{2}{3}\right) =$$
$$= \frac{2}{3}\left(\frac{2}{3} - d\right)\left(\frac{2}{3} + d\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9} - d^2\right) = \frac{2}{3}\left(\frac{4}{9} - \frac{1}{3}\right) = \frac{2}{27}.$$

Atsakymas. a) $m = \frac{2}{27}$; b) $-\frac{1}{3}$, $-\frac{1}{3} \pm\frac{\sqrt{3}}{3}$.

317. *Pirmas būdas.* Sujungę E su Q (žr. pav.) turime, jog keturkampyje $ABEQ$ kampai EBQ ir EAQ yra lygūs (po 45°).



Vadinasi, apie keturkampį $ABEQ$ galima apibrėžti apskritimą, todėl jo priešingų kampų sumos yra po 180°. Kadangi ABE status, tai ir priešingas jam keturkampio kampas AQE irgi status. Tada trečiasis trikampio AQE kampas irgi 45°, o AQE yra statusis lygiašonis trikampis, $AE = AQ\sqrt{2}$.

Analogiškai jungdami taškus P ir F, gautume $AF = AP\sqrt{2}$. Todėl

$$S_{\triangle AEF} : S_{\triangle APQ} = \left(\frac{1}{2}AE \cdot AF \sin 45^\circ\right) : \left(\frac{1}{2}AP \cdot AQ \sin 45^\circ\right) = 2.$$

Antras būdas. Tegu kvadrato $ABCD$ kraštinė $AB = a$, $\angle FAD = \alpha$, o $\angle EAB = \beta$. Tada iš $\triangle AQD$ pagal sinusų teoremą $AQ = \frac{a \sin 45^\circ}{\sin(45^\circ+\alpha)}$. Iš $\triangle APB$ analogiškai $AP = \frac{a \sin 45^\circ}{\sin(45^\circ+\beta)}$. Tada trikampių $\triangle AEF$ ir $\triangle APQ$ plotų santykis lygus

$$\frac{AE \cdot AF}{AP \cdot AQ} = \frac{2\sin(45^\circ+\alpha)\sin(45^\circ+\beta)}{\cos\alpha\cos\beta}.$$

Kadangi $\alpha + \beta = 45^\circ$, tai $\sin(45^\circ + \alpha) = \sin(90^\circ - \beta) = \cos\beta$, $\sin(45^\circ + \beta) = \cos\alpha$, ir ieškomasis santykis lygus 2.

Pastaba. Iš sąlygos galima numanyti, kad plotų santykis nepriklauso nuo taško E padėties. Atspėti, kad jis lygus 2, galima paėmus „ribinį" atvejį, kai taškas E (ir taškas P) atslenka į B, o taškas F atslenka į C (taškas Q atsiduria kvadrato įstrižainių susikirtimo taške). Tuomet $\triangle AQB$ užima ketvirtadalį, o $\triangle ACB$ — pusę pradinio kvadrato.

Atsakymas. Plotų santykis lygus 2.

318. Žr. 314 uždavinį.

319. Kadangi $a^2 + b^2 = (a+b)^2 - 2ab$ dalijasi iš 4, tai $a + b$ — lyginis. Tada $(a+b)^2$ dalijasi iš 4, vadinasi, ab dalijasi iš 2. Todėl bent vienas iš skaičių a ir b lyginis. Kadangi jų suma lyginė, tai ir kitas — lyginis. Vadinasi, $a = 2p$, $b = 2q$, $a^2 + b^2 = 4(p^2 + q^2)$ dalijasi iš 124, todėl $p^2 + q^2$ dalijasi iš 31.

Dabar įrodysime, kad tiek p, tiek q dalijasi iš 31.

Bet kurį natūralųjį skaičių n galima užrašyti pavidalu $n = 31k \pm r$, kur r ne daugiau už 15 (tai — vadinamosios mažosios liekanos; iš tikrųjų, jei $r \geqslant 16$, tai galima atimti 31). Iš lygybės $n^2 = 31^2k^2 \pm 2 \cdot 31kr + r^2$ matome, kad n^2 dalybos iš 31 liekaną lemia r^2.

Dabar surašykime galimas r reikšmes, r^2 reikšmes bei mažąsias r^2 dalybos iš 31 liekanas į lentelę:

0	0	0
1	1	1
2	4	4
3	9	9
4	16	−15
5	25	−6
6	36	5
7	49	−13
8	64	2
9	81	−12
10	100	7
11	121	−3
12	144	−11
13	169	14
14	196	10
15	225	8

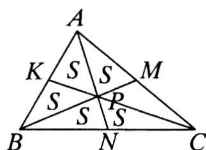
Gautas mažąsias liekanas surašykime eilute:
$0, 1, 2, -3, 4, 5, -6, 7, 8, 9, 10, -11, -12, -13, 14, -15.$

Užrašykime p ir q minėtu pavidalu. Kadangi $p^2 + q^2$ dalijasi iš 31, tai šios eilutės dviejų (galbūt ir vienodų) dėmenų suma dalijasi iš 31. Bet ta suma moduliu mažesnė už 31, vadinasi, ji lygi 0. Kitaip sakant, liekana turi turėti šioje eilutėje ir priešingą, bet tokia yra tik liekana 0. Vadinasi, tiek skaičiaus p, tiek skaičiaus q liekana yra nulis, t. y. abu tie skaičiai dalijasi iš 31.

Kadangi kiekvienas iš skaičių a ir b dalijasi iš 2 ir iš 31, tai $a + b$ dalijasi iš 62, o $2a + 2b$ dalijasi iš 124.

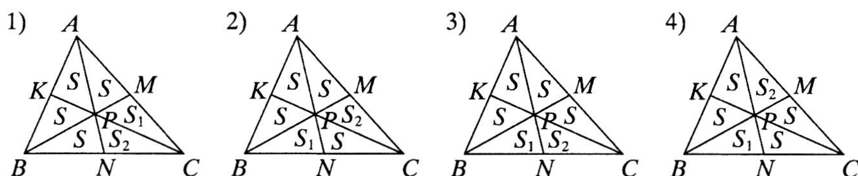
LI OLIMPIADA (2002 m.)

320. a) Tiesės AP, BP ir CP kerta kraštines BC, AC ir AB atitinkamai taškuose N, K ir M. Pažymėkime penkių mažųjų trikampių plotus S ir sakykime, kad šeštojo trikampio viena iš kraštinių yra tiesėje AC.



Kadangi $S_{\triangle APK} = S_{\triangle KPB}$, tai $AK = KB$. Todėl $S_{\triangle ACK} = S_{\triangle KCB}$. Iš čia gauname: $2S + S_{\triangle MCP} = 3S$. Taigi $S_{\triangle MCP} = S$.

b) Brėžiniuose pavaizduoti keturi galimi atvejai



Kadangi yra keturi mažesni trikampiai vienodų plotų, tai galima laikyti, kad dviejų trikampių kraštinės guli tiesėje AB.

(1) Kadangi $S_{\triangle APK} = S_{\triangle KPB}$, tai $AK = KB$, o iš to seka, kad $2S + S_1 = 2S + S_2$, todėl $S_1 = S_2$. Pastebime, kad

$$\frac{S_{\triangle APM}}{S_{\triangle MOP}} = \frac{AM}{MC} = \frac{S_{\triangle ABM}}{S_{\triangle MCB}}.$$

Tada $\frac{S}{S_1} = \frac{3S}{2S_1+S}$.

Iš čia gauname, kad $S = S_1 (= S_2)$.

(2) Taip pat kaip ir (1) atveju gauname, kad $S_1 = S_2$ ir

$$\frac{AM}{MC} = \frac{S}{S_1} = \frac{3S}{S+2S_1}.$$

Iš čia gauname, kad $S = S_1 (= S_2)$.

(3) Kadangi

$$\frac{S_{\triangle BPN}}{S_{\triangle NPC}} = \frac{BN}{NC} = \frac{S_{\triangle BAN}}{S_{\triangle NAC}},$$

tai $\frac{S_1}{S_2} = \frac{2S+S_1}{2S+S_2}$.

Iš čia gauname, kad $S_1 = S_2$.

Kadangi $S_{\triangle AMP} = S_{\triangle MCP}$, tai $AM = MC$. Todėl $S_{\triangle BAM} = S_{\triangle BMC}$. Taigi, $3S = S + 2S_1$ $(S_1 = S_2)$. Iš čia gauname, kad $S_1 = S$.

(4) Kadangi $S_{\triangle BKP} = S_{\triangle KAP}$, tai $BK = KA$. Todėl $S_{\triangle BKC} = S_{\triangle KAC}$. Iš čia gauname, kad $S_1 = S_2$. Kadangi

$$\frac{S_{\triangle AMP}}{S_{\triangle MCP}} = \frac{S_{\triangle AMB}}{S_{\triangle BMC}},$$

tai

$$\frac{S_1}{S} = \frac{2S+S_1}{2S+S_1} \quad (S_1 = S_2).$$

Iš čia gauname, kad $S_1 = S$.

Atsakymas. b) Taip, galima.

321. Įrodysime, kad atliekant bet kurią iš nurodytų operacijų, lentoje parašytų skaičių sumos dalybos iš 6 liekana nesikeičia. Iš to seks, kad lentoje likęs vienas skaičius negali būti 0, nes $1 + 2 + \cdots + 100 = 5050$ — nesidalija iš 6.

Taigi, sakykime, kad lentoje parašyti skaičiai $a_1, a_2, \ldots, a_n$ ir skaičiams a_i, a_j, $i \neq j$, taikome vieną iš operacijų.

a) Skaičiams a_i, a_j taikome pirmąją operaciją. Akivaizdu, kad šiuo atveju lentoje parašytų skaičių sumos dalybos iš 6 liekana prieš ir po operacijos — ta pati.
b) Skaičiams a_i, a_j taikome antrą operaciją. Kadangi $a_i - 5a_j = a_i + a_j - 6a_j$, tai šiuo atveju lentoje parašytų skaičių sumos dalybos iš 6 liekanos prieš ir po operacijos — vėl sutaps.
c) Skaičiams a_i, a_j taikome trečią operaciją. Kadangi $7a_i - 11a_j = a_i + a_j + 6(a_i - 2a_j)$, tai ir šiuo atveju lentoje parašytų skaičių sumos dalybos iš 6 liekanos prieš ir po operacijos — vėl sutaps.

Atsakymas. Ne, negali.

322. a) Atsakymas neigiamas. Imkime keturkampį, kurio $\alpha^\circ = \beta^\circ$, $\gamma^\circ = 2\beta^\circ$ ir $\delta^\circ = 3\beta^\circ$, čia $\beta^\circ = \frac{360^\circ}{7}$. Aišku, kad iš keturių atkarpų, kurių ilgiai β, β, 2β, 3β, neįmanoma išrinkti trijų ir sudaryti trikampį. Lieka pastebėti, kad $3\beta^\circ = \frac{1080^\circ}{7} < 180^\circ$, ir mūsų keturkampis — iškilas.

b) Atsakymas teigiamas.

Tarkime priešingai. Sakykime, kad $\alpha \leqslant \beta \leqslant \gamma \leqslant \delta \leqslant \varepsilon$ ir $\alpha^\circ+\beta^\circ+\gamma^\circ+\delta^\circ+\varepsilon^\circ = 540^\circ$. Kadangi penkiakampis — iškilas, tai $\varepsilon^\circ < 180^\circ$. Iš atkarpų, kurių ilgiai γ, δ, ε, negalime sudaryti trikampio, todėl $\varepsilon \geqslant \gamma + \delta$. Taigi $\varepsilon^\circ < 180^\circ$, $\gamma^\circ + \delta^\circ < 180^\circ$, $\alpha^\circ + \beta^\circ < 180^\circ$.

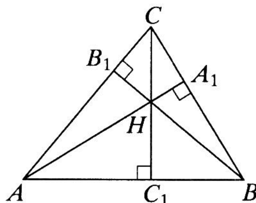
Sudėjus panariui šias nelygybes gausime: $\alpha^\circ + \beta^\circ + \gamma^\circ + \delta^\circ + \varepsilon^\circ < 3 \cdot 180^\circ = 540^\circ$. Prieštara!

323. a) Aibę $\{1, 2, 3, \ldots, 36\}$ suskirstykime į 12 poaibių: $\{1, 4, 8\}$, $\{2, 5, 9\}$, $\{3, 6, 10\}$, $\{7, 11, 14\}$, $\{12, 15, 19\}$, $\{13, 16, 20\}$, $\{17, 21, 24\}$, $\{18, 22, 25\}$, $\{23, 26, 30\}$, $\{27, 31, 34\}$, $\{28, 32, 35\}$, $\{29, 33, 36\}$.

Paėmus bet kokius 13 skaičių iš aibės $\{1, 2, 3, \ldots, 36\}$, bent du iš jų priklausys tam pačiam poaibiui. Belieka pastebėti, kad kiekvieno poaibio bet kurių dviejų skaičių skirtumas yra 3, 4 arba 7.

b) Galima panašiai suskaidyti į 12 poaibių kiekvieną iš aibių $\{1, 2, 3, \ldots, 36\}$, $\{37, 38, \ldots, 72\}$, $\ldots$, $\{325, 326, \ldots, 360\}$. Taip gausime 120 poaibių, kuriuose bet kurių dviejų skaičių skirtumas yra 3, 4 arba 7. Taigi paėmus 121 skaičių, visada atsiras du, kurių skirtumas bus 3, 4 arba 7.

324. Sakykime, kad tiesė CH kerta kraštinę AB taške C_1.



Tada CC_1 — trečioji duotojo trikampio aukštinė. $\triangle C_1BH \backsim \triangle B_1BA$, nes šie trikampiai statūs ir turi bendrą smailų kampą $\angle B_1BA$. Todėl

$$\frac{BC_1}{BH} = \frac{BB_1}{BA},$$

arba $AB \cdot BC_1 = BH \cdot BB_1$.

$\triangle AHC_1 \backsim \triangle ABA_1$, todėl analogiškai gauname, kad $AB \cdot AC_1 = AA_1 \cdot AH$.

Sudėję paskutines dvi lygybes, gauname:

$$AB^2 = AH \cdot AA_1 + BH \cdot BB_1.$$

325. Sudėję duotas nelygybes panariui gauname: $2z^2 + 200z + 10\,000 \leqslant 8n + 400$ arba $z^2 + 100z + 5000 \leqslant 4(u + 50)$.

Tačiau $(z + 50)^2 + 50 = z^2 + 100z + 2550 < z^2 + 100z + 5000 \leqslant 4(u + 50)$.

Įrodykime antrą nelygybę. Padauginkime antrą duotąją nelygybę iš 99 ir sudėkime su pirma panariui:

$$100z^2 + 2 \cdot 99 \cdot 100z + 99 \cdot 10\,000 \leqslant 400u + 4 \cdot 100 \cdot 99,$$

arba

$$z^2 + 2 \cdot 99z + 9900 \leqslant 4u + 4 \cdot 99,$$

t. y.

$$(z + 99)^2 + 99 \leqslant 4(u + 99).$$

326. Nagrinėkime visus iš eilės einančius ketvertus duotoje sekoje, pradedant ketvertu 4, 6, 2, 4. Sekoje ketvertai pradės kartotis, nes iš viso yra ne daugiau 10^4 skirtingų ketvertų. Ketvertas 4, 6, 2, 4 bus pirmasis, kuris sekoje pasikartos, nes tiek į kairę, tiek į dešinę sekos nariai nusakomi vienareikšmiškai. Lieka pastebėti, kad prieš ketvertą 4, 6, 2, 4 eina ketvertas 2, 0, 0, 2.

327. Žr. 323 uždavinį.

DALYKINĖ RODYKLĖ

UŽDAVINIŲ TEMATIKA

Po uždavinio numerio nurodyta tą uždavinį atitinkanti tema (temos) iš dalykinės rodyklės.

1 L6
2 D1, A2
3 G2
4 S1
5 S6, K4
6 S2
7 S5, F2
8 F4
9 A2
10 F2, F3
11 L7
12 S1
13 F3
14 A6
15 G2
16 D1
17 L2
18 N2
19 S2
20 D6
21 T2
22 N5
23 S2
24 L6
25 D6
26 N1
27 L6
28 R1, R2
29 N3
30 T4, T11
31 S2
32 A4
33 L6
34 D1
35 G2, K6
36 S2
37 L7
38 G2
39 L14
40 G2
41 G2
42 L8
43 G2, T11
44 L1
45 T1
46 A4
47 L7
48 L1
49 S1
50 S2, S4
51 S2
52 L14
53 G2
54 L1
55 I1
56 R3
57 P6, T11
58 S1
59 L1
60 D1, S2
61 L6
62 S2, A2
63 S2
64 G2, T11
65 L1
66 A4
67 D1, S2
68 A4, S2
69 L1, S2
70 T11
71 S1
72 L6
73 P6
74 N2
75 P1
76 D6
77 A2, S2
78 I2
79 N4
80 D7
81 P2
82 L6
83 N1
84 S2
85 A2, S2
86 S1, N1
87 U5
88 D6
89 L7
90 I2
91 L7, L1
92 N1,
93 L9
94 L8
95 T11, P3
96 P2, G2
97 S2
98 L7
99 I2
100 G2
101 G3
102 S2
103 D6
104 T11, G2
105 L1
106 L6
107 L7
108 T11, G3
109 A2, S2
110 P2, G3
111 L7
112 T11, G2
113 L1
114 T11, G3
115 K6
116 T11
117 I2
118 S1
119 A2
120 L1
121 T2
122 S2
123 L1
124 T11, A6
125 S2
126 T2
127 L1
128 T11, G2
129 T7
130 S2, A2
131 S4
132 T4, G2
133 L1
134 L7, S2
135 T11, G2
136 T2, I2
137 G2, N4
138 T11
139 S4, S2
140 L7, L1
141 L7
142 S2
143 T11, G2
144 L11
145 T2, I2
146 L7
147 L2, S2
148 D7
149 A2
150 T11, A6
151 L7
152 S2
153 L1, L2
154 G2
155 I2
156 L1
157 L7
158 U5
159 S1
160 I2
161 A2
162 L1
163 D7
164 S2
165 T2
166 L2
167 I2
168 A6, T11, G2
169 S2
170 D1
171 T2
172 L1
173 G3
174 S9, S2
175 S1
176 N2
177 L1
178 L2, L9
179 P6
180 G2, A4

181 T11, G3
182 L1
183 T11
184 N1, S2
185 Ž1
186 A2, S2
187 L2
188 L9
189 G2
190 I2
191 L3
192 L1
193 T11, A6
194 S2
195 S2
196 L9
197 S10
198 T11, G2
199 K6
200 I2
201 L2
202 T11, 62
203 T2
204 T2
205 P6
206 N2
207 T11, G3
208 K5
209 L16
210 T2, I2
211 L16
212 T11
213 N1
214 I2, U3
215 I2, U3
216 T11, G2
217 P7
218 L1
219 M1
220 S2
221 A2
222 I2
223 K6
224 N1
225 S9
226 T11, G2
227 L1
228 L2
229 D6
230 I2
231 S2
232 P1
233 F2
234 G3, A4
235 L2, S6
236 T11, P6
237 L1
238 G5
239 L16
240 S6
241 I2
242 L16
243 F2
244 T4
245 S6
246 S6
247 T4, P2
248 L16
249 T2
250 G2
251 S9
252 B1
253 T2, L16
254 T4
255 D7
256 L16
257 B1
258 L16
259 L16
260 L7
261 S1, N2
262 Ž1
263 D6, A4
264 L16
265 U5
266 N2
267 A4
268 L7
269 S6
270 S2
271 T11
272 F2
273 L8
274 S5
275 U5, T11, G2
276 G2
277 N2
278 S6
279 A2
280 L16
281 S6
282 S6
283 ST4, A4, P2
284 L16
285 I2
286 S4, S6
287 S6
288 L16
289 I2
290 F2
291 T11, G2
292 S6
293 T11, G2
294 S6
295 S6
296 L1
297 P2, L16
298 L16, S7
299 M1
300 A4
301 S7
302 L1
303 D1
304 T2
305 S1
306 T11
307 S6
308 L16
309 F2
310 T11, P3
311 L7
312 S2
313 A4, G2
314 L16
315 S6
316 L2
317 P3, K6
318 L16
319 D1
320 T11
321 S7
322 S2
323 A4, G2
324 L16
325 S6
326 L2
327 P3, K6

PANAUDOTOS LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. A. Grincevičius, J. Mačys. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai. Šviesa, Kaunas, 1990.
2. A. Grincevičius, J. Mačys. Matematikos olimpiadų uždaviniai. MKI, Vilnius, 1987.
3. A. Grincevičius, J. Mačys. Matematikos olimpiadų uždaviniai. MKI, Vilnius, 1988.
4. А. Гринцявичюс, Ю. Мачис. Задачи литовских математических олимпиад. Институт математики и информатики, Вильнюс, 1992.
5. XXXV respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada (1986 m.). Sud. A. Grincevičius ir J. Mačys, RMTI, MKI, Vilnius, 1987.
6. XXXVI respublikinė jaunųjų matematikų olimpiada (1987 m.). Sud. A. Grincevičius ir J. Mačys, RMTI, MKI, Vilnius, 1988.
7. A. Grincevičius, J. Mačys. 1988 m. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai. MKI, Vilnius, 1988.
8. A. Grincevičius, J. Mačys. 1989 m. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai. MKI, Vilnius, 1989.
9. A. Grincevičius, J. Mačys. 1990 m. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai. MII, Vilnius, 1990.
10. A. Grincevičius, J. Mačys. 1991 m. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai. MII, Vilnius, 1991.
11. A. Grincevičius, J. Mačys. 1992 m. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai. MII, Vilnius, 1993.
12. J. Mačys, A. Plikusas. 1993 m. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai. MII, Vilnius, 1994.
13. J. Mačys, A. Plikusas. 1994 m. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai. MII, Vilnius, 1995.
14. J. Mačys, A. Plikusas. 1995 m. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai. MII, Vilnius, 1996.
15. G. Alkauskas, J. Mačys, A. Plikusas. 1996 m. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai. MII, Vilnius, 1998.
16. G. Alkauskas, J. Mačys, A. Plikusas. 1997 m. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiados uždaviniai. MII, Vilnius, 1998.
17. Žurnalas „Alfa plius omega“, LMD, TEV, Vilnius, 1996–2003.

REKOMENDUOJAMOS LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. A. Grincevičius, J. Mačys. Lietuvos jaunųjų matematikų olimpiadų uždaviniai. Šviesa, Kaunas, 1990.
2. Olimpiadinis matematikos uždavinynas. Sud. J. Kubilius, Šviesa, Kaunas, 1972.
3. Žurnalas „Alfa plius omega“, LMD, TEV, Vilnius, 1996–2003.
4. Matematinės varžybos. Geometrija. Red. I. Gelfandas, Šviesa, Kaunas, 1977.
5. Matematika 10, II dalis, 9 skyrius „Tyrimo uždaviniai“. TEV, Vilnius, 2001.
6. Matematika 10. Mokytojo knyga. 9 skyrius „Tyrimo uždaviniai“. TEV, Vilnius, 2002.
7. 5–16 nr. iš Panaudotos literatūros sąrašo.
8. П. С. Моденов. Сборник задач по специальному курсу элементарной математики. Москва, 1960.
9. P. Tannenbaumas, R. Arnoldas. Kelionės į šiuolaikinę matematiką. TEV, Vilnius, 1995.
10. V. Gusevas, A. Orlovas, A. Rozentalis. Užklasinis matematikos darbas VI–VIII klasėje. Šviesa, Kaunas, 1982.
11. Žurnalas „Квант“.
12. Serijos „Библиотека математического кружка“, „Популярные лекции по математике“, „Задачи и олимпиады“, „Библиотека журнала „Квант“.
13. A. Nivenas. Racionalūs ir iracionalūs skaičiai. Mintis, Vilnius, 1974.
14. H. Šteinhauzas. Matematikos kaleidoskopas. Mokslas, Vilnius, 1976.
15. V. Boltianskis, I. Sidorovas, M. Šabuninas. Elementariosios matematikos paskaitos ir uždaviniai. Šviesa, Kaunas, 1982.
16. Kengūra. Tarptautinio matematikos konkurso užduotys ir sprendimai. Sud. J. Mačys, TEV, Vilnius, 1999, 2000, 2001, 2002.